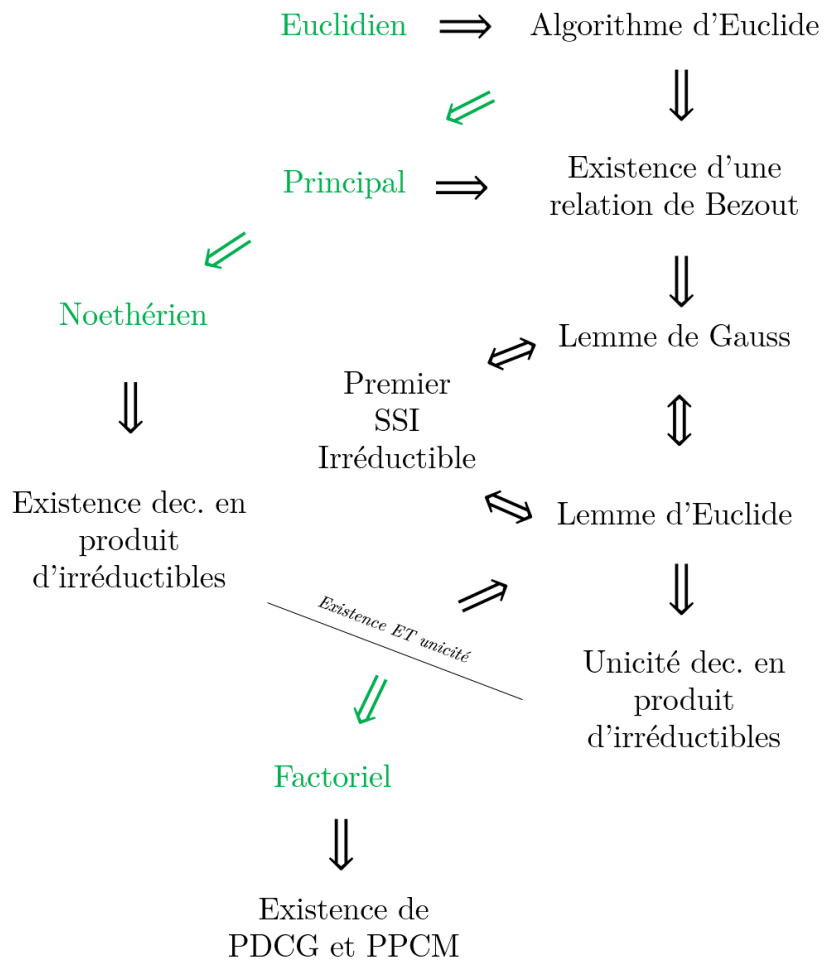


Diagramme d'implications dans un anneau intègre



Contre exemples aux implications réciproques fausses

Factoriel $\not\Rightarrow$ Noethérien : $K[X_1, X_2, X_3, \dots]$ avec K un corps

Noethérien $\not\Rightarrow$ Principal : $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$; $K[X, Y]$

Noethérien $\not\Rightarrow$ Factoriel : $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$

Principal $\not\Rightarrow$ Euclidien : $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$; $\mathbb{R}[X, Y]/\langle X^2 + Y^2 + 1 \rangle$

Factoriel $\not\Rightarrow$ Principal : $\mathbb{Z}[X]$; $K[X, Y]$ avec K un corps

Propriétés et définitions

Dans un anneau A intègre, on a ce qui suit.

Lemme d'Euclide. Si p est irréductible et $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$.

Lemme de Gauss. Si $a|bc$ et si a est premier avec b , alors $a|c$.

Élément irréductible. p est irréductible ssi $p \neq 0$, $p \notin A^\times$, et $(p = ab \Rightarrow a \in A^\times$ ou $b \in A^\times)$

Élément premier. p est premier (i.e. $p|bc \Leftrightarrow p|b$ ou $p|c$) SSI

$\langle p \rangle$ est premier (i.e. $ab \in \langle p \rangle \Rightarrow a \in \langle p \rangle$ ou $b \in \langle p \rangle$)

Propriété. Premier \Rightarrow Irréductible

Anneaux de polynômes

A		$A[X]$
Intègre	\Leftrightarrow	Intègre
Corps	\Rightarrow	Euclidien
\Downarrow Corps	\Leftrightarrow	Principal \Downarrow
Factoriel	\Leftrightarrow	Factoriel
Remarque : A factoriel $\Rightarrow A[X_1, X_2, \dots]$ factoriel		

Quotients

Dans un anneau A intègre, on a ce qui suit.

I idéal		A/I
\Downarrow Maximal	\Leftrightarrow	Corps \Downarrow
Premier	\Leftrightarrow	Intègre \Downarrow

Remarque : « La factorialité passe mal au quotient ».