Classification des groupes abéliens d'ordre 600.

Clémentine LAURENS

Octobre 2019

Théorème (Théorème de structure des groupes abéliens finis). *Soit G un groupe abélien fini non nul. alors il existe des entiers $r \in \mathbb{N}^*$ et $(d_i)_{i\in[\![1,r]\!]} \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :*

$$d_1 > 1 \text{ et } \forall i \in [\![1, r-1]\!], d_i \mid d_{i+1}$$

et

$$G \simeq (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z})$$

De plus, les entiers r et $(d_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ vérifiant ces propriétés sont uniques. Les $(d_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ sont appelés facteurs invariants du groupe G. [1]

Démonstration. On pourra par exemple se référer au poly de Matthieu Romagny, disponible en ligne à l'adresse `https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/theme/structure_des_groupes_abeliens_finis.pdf`.

□

Application (Classification des groupes abéliens d'ordre 600, à isomorphisme de groupe près).

- Soit G un groupe abélien d'ordre 600. D'après le théorème précédent, il existe des entiers $r \in \mathbb{N}^*$ et $(d_i)_{i\in[\![1,r]\!]} \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que $d_1 > 1$, $\forall i \in [\![1, r-1]\!], d_i \mid d_{i+1}$ et

  $$G \simeq (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z})$$

  On cherche à caractériser ces entiers r et $(d_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$, afin d'expliciter tous les cas possibles.

- **Condition sur les $(d_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$.**
  D'après le théorème de Lagrange, $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $d_i \mid 600$ [2]. Or, $|G| = 600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ (unique décomposition en facteurs premiers). Par conséquent : $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\exists (a_i, b_i, c_i) \in \left(\mathbb{N}^3\right) \setminus (0,0,0)$ tel que $\boxed{d_i = 2^{a_i} \times 3^{b_i} \times 5^{c_i}}$.

- **Condition sur r.**
  L'isomorphisme de groupe $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$ impose que $\prod_{i=1}^r d_i = |G|$ i.e. $\boxed{\prod_{i=1}^r d_i = 2^3 \times 3 \times 5^2}$ $(\star)$. Or, $d_1 > 1$, donc $(a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$. Effectuons une disjonction de cas.

  ➥ Si $a_1 \neq 0$, alors $2 \mid d_1$. Comme $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $d_i \mid d_{i+1}$, on obtient que $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $2 \mid d_i$, et ainsi $(\star)$ impose que $2^r \mid (2^3 \times 3 \times 5^2)$. Donc $r \leq 3$.

1. Dans ce théorème, l'isomorphisme sur G est bien entendu un isomorphisme de groupes.
2. Car $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$ est un sous groupe d'ordre d_i du groupe G, et que G d'ordre 600

➥ Si $b_1 \neq 0$, le même raisonnement amène $r \leq 1$.
➥ Si $c_1 \neq 0$, le même raisonnement amène $r \leq 2$.

En toute généralité, on obtient donc que $\boxed{r \leq 3}$.

- Si $r = 1$, alors $(\star)$ impose $\boxed{d_1 = 600}$. Ainsi, $G \simeq \mathbb{Z}/600\mathbb{Z}$.

- Si $r = 2$, alors $\begin{cases} d_1 & = 2^{a_1} \times 3^{b_1} \times 5^{c_1} \\ d_2 & = 2^{a_2} \times 3^{b_2} \times 5^{c_2} \end{cases}$.

  Or, $(\star)$ impose alors $\begin{cases} a_1 + a_2 & = 3 \\ b_1 + b_2 & = 1 \\ c_1 + c_2 & = 2 \end{cases}$.[3] Par ailleurs $d_1 \mid d_2$ impose $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \\ b_1 \leq b_2 \\ c_1 \leq c_2 \end{cases}$.

  Par conséquent, $\boxed{\begin{cases} (a_1, a_2) \in \{(0,3), (1,2)\} \\ (b_1, b_2) = (0,1) \\ (c_1, c_2) \in \{(0,2), (1,1)\} \end{cases}}$.

  Enfin, la condition supplémentaire $\forall i \in \{1,2\}$, $(a_i, b_i, c_i) \neq (0,0,0)$ fournit :

$$G \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2^3{\times}3{\times}5)\mathbb{Z}) \textbf{ ou } G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2^2{\times}3{\times}5^2)\mathbb{Z}) \textbf{ ou } G \simeq (\mathbb{Z}/(2{\times}5)\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2^2{\times}3{\times}5)\mathbb{Z}).$$

- Si $r = 3$, on procède de même que pour $r = 2$, et les conditions $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 & = 3 \\ b_1 + b_2 + b_3 & = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 & = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \\ b_1 \leq b_2 \leq b_3 \\ c_1 \leq c_2 \leq c_3 \end{cases}$ imposent $\boxed{\begin{cases} (a_1, a_2) \in \{(0,0,3), (0,1,2), (1,1,1)\} \\ (b_1, b_2) = (0,0,1) \\ (c_1, c_2) \in \{(0,0,2), (0,1,1)\} \end{cases}}$.

  La condition supplémentaire $\forall i \in \{1,2,3\}$, $(a_i, b_i, c_i) \neq (0,0,0)$ fournit enfin :

$$G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})) \times (\mathbb{Z}/(2{\times}3{\times}5^2)\mathbb{Z}) \textbf{ ou } G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2{\times}5)\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2{\times}3{\times}5)\mathbb{Z}).$$

- Conclusion. A isomorphisme de groupe près, il y a exactement 6 groupes abéliens d'ordre 600, qui sont :

$$\begin{cases} \mathbb{Z}/600\mathbb{Z} \\ (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2^3{\times}3{\times}5)\mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2^2{\times}3{\times}5^2)\mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z}/(2{\times}5)\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2^2{\times}3{\times}5)\mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})) \times (\mathbb{Z}/(2{\times}3{\times}5^2)\mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2{\times}5)\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(2{\times}3{\times}5)\mathbb{Z}) \end{cases}$$

□

3. On dit que les $(a_i)_i$ (resp. les $(b_i)_i$, resp. les $(c_i)_i$) forment une *partition* de 3 (resp. de 1, resp. de 2).