205. Espaces complets. Exemples et applications.

Références :

- *Titre*, Prénom Nom

Développements :

- Cauchy-Lipschitz ?
- Banach-Steinhauss + Application aux séries de Fourier ?

Motivations :

- Théorèmes d'existence, de prolongement...
- Étudier la convergence de suites sans connaître préalablement leur limite (point de vue interne).
- Notion de complété d'un espace $\rightarrow$ Idée de faire converger des suites qui ne convergeaient pas dans l'espace non complété (point de vue externe) (exemple de la construciton de $\mathbb{R}$ comme complété de $\mathbb{Q}$).

Exemples d'espaces complets :

✔ $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
✔ Tout $\mathbb{R}$-evn de dimension finie
✔ $\left(\mathcal{C}_b^0(E,F), \|\cdot\|_\infty\right)$ avec E un evn et F un Banach
✔ $\left(\mathcal{L}_c(E,F)\, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}\right)$ avec E un evn et F un Banach
✔ $\left(\mathcal{C}^0([0,1],F), \|\cdot\|_\infty\right)$ avec F un Banach
✔ $\left(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right)$ pour tout $p \in [1,+\infty]$
✔ $\left(l^p(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right)$ pour tout $p \in [1,+\infty]$
✔ $\left(\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ (ensemble des fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en $+\infty$)

Contre-exemples (espaces non complets) :

✗ $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ (contre-ex : on peut exhiber une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,)
✗ $\left(c_c(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right)$ pour $p \in [1,+\infty]$ (sous-espace non fermé du complet $\left(l^p(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right)$).
✗ $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right)$ pour $p \in [1,+\infty]$ (sous-espace non fermé du complet $\left(L^p([0,1]), \|\cdot\|_p\right)$)
✗ $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme

1 Espaces métriques complets.

1.1 Suites de Cauchy

Suites de Cauchy. Propriétés (CV $\Rightarrow$ Cauchy, Cauchy $\Rightarrow$ bornée, Cauchy + valeur d'adhérence $\Rightarrow$ CV, l'image d'une suite de Cauchy par une fonction uniformément continue est une suite de Cauchy).

Def d'un espace complet. Exemples simples. Contre ex : $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, en exhibant une suite de rationnels qui tend vers $\sqrt{2}$ (suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$, non convergente dans $\mathbb{Q}$)

Caractérisation : théorème des fermés emboités (II.3.2.1 du Tisseron)

1.2 Propriétés élémentaires des espaces métriques complets

Un fermé d'un e.m. est complet. On a même : les ss espaces complets d'un em complet sont exactement les fermés.

Compact $\Rightarrow$ Complet

Complet $\Rightarrow$ Fermé

Une intersection quelconque de ss espaces complets d'un em est complète

Une union finie de ss espaces complets d'un em est complète

Un produit fini ou dénombrable de complets est complet. Application : $\mathbb{R}^n$, espaces de matrices...

L'image d'un complet par une application uniformément continue est un espace complet

Si deux distances sur un e.m. sont *uniformément* équivalentes, alors l'espace est complet pour l'une ssi il est complet pour l'autre. Contre-ex à l'équivalence des normes en dimension infinie (cf. Oraux X-ENS 3)

Notion de complété d'un espace métrique. Construction de $\mathbb{R}$ comme complété de $\mathbb{Q}$.

1.3 Analyse dans les espaces métriques complets

Pt fixe de Banach (i.e. de Picard)

Pt fixe de Banach itéré. Application : Cauchy-Lipschitz **[Développement ?]**

Th de prolongement des app unif continues. Application : définition de l'intégrale de Riemann

Th d'Ascoli

Th de Baire (ici ?).

2 Espaces de Banach.

Def

2.1 Complétude et convergence de séries

Critère de Cauchy pour les séries

Complet $\Leftrightarrow$ CV absolue implique CV

Application : séries entières, séries de fonctions, exponentielle matricielle

2.2 Analyse dans les espaces de Banach

Théorème de Baire $\Rightarrow$ Un evn à base dénombrable n'est pas complet. Exemple : $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Th de Baire $\Rightarrow$ Th de Banach-Steinhauss **[Développement ?]**

Th de Baire $\Rightarrow$ Th de l'application ouverte $\Rightarrow$ Th de l'isomorphisme de Banach.

Application du théorème de l'isomorphisme de Banach : deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un Banach sont équivalentes ssi $\exists C > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq C \|\cdot\|_2$.

Théorème des fonctions implicites

Théorème d'inversion locale

2.3 Un exemple important : les espaces L^p

Th de Riesz-Fisher

Th de Plancherel

3 Espaces de Hilbert. Théorème de projection sur un convexe fermé non vide.

Th de projection sur un convexe fermé non vide

Application : définition de l'espérance conditionnelle

Conséquences : TSO + Application du TSO : critère de densité

Autre conséquence : Th de représentation de Riesz