

241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Références :

- *Analyse*, Xavier GOURDON
- *Théorie de l'intégration*, Marc BRIANE et Gilles PAGÈS
- *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, Mohammed EL AMRANI
- *Suites et séries*, Jean COMBES
- *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*, Mohammed EL AMRANI

Développements :

- Théorème de Steinhaus
- Banach-Steinhaus et application aux séries de Fourier
- Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d

Motivations : Trois intérêts à l'étude des suites et séries de fonctions :

- Etude de phénomènes "asymptotiques", modélisés par une limite de suite ou série de fonctions (ex : marche aléatoire en proba \rightarrow on somme les déplacements à chaque instant pour étudier un comportement asymptotique). On s'intéresse à la préservation de propriétés (monotonie, mesurabilité, régularité...).
- Approximation de fonctions par des fonctions mieux connues (typiquement : des polynômes, avec les séries entières) et plus simples à étudier (une fois qu'on connaît les propriétés de préservation de propriétés intéressantes par passage à la limite).
- S'intéresser aux convergences de suites et séries de fonctions, c'est s'intéresser aux propriétés des espaces de fonctions en tant qu'espaces métriques/evn.

Dans toute la leçon, on considère des fonctions d'un e.m. dans un e.v.n.

1 Modes classiques de convergence et propriétés [Gourdon]

Remarque : l'étude d'une série de fonctions revient à l'étude de la suite de ses sommes partielles. Par conséquent, sauf cas spécifiques, les théorèmes sont énoncés dans le cas de *suites* de fonctions (et non de séries).

1.1 Convergence simple

Définition. Préservation de la monotonie et de la convexité. Pas de préservation de la continuité ni du caractère borné (contre-ex). Donc mauvaise préservation des propriétés de régularité. En revanche, on verra plus tard que la convergence presque partout, analogue de la CV simple dans les espaces de fonctions mesurables, fournit des propriétés intéressantes pour les questions d'intégration.

Critère pour les séries : convergence absolue (i.e. convergence de $\sum |f(x)|$ pour tout x) \Rightarrow CV simple d'une série.

1.2 Convergences uniforme et normale

Définition de la convergence uniforme. Interprétation géométrique (au tableau).

Dans un Banach, on a une condition suffisante - mais non nécessaire - pour la convergence uniforme de séries : la convergence normale. Définition. Implique la CV uniforme dans un Banach. Contre-ex dans un cadre non complet. [Justification de l'insertion de cette def dans cette partie : dans la très grande majorité des cas, on prouve la CV normale d'une série (pratique parce qu'on sait manipuler des séries numériques) *pour* montrer qu'on a CV uniforme, et utiliser les propriétés de cette CV uniforme !]

Implique la convergence simple. Réciproques partielles :

- Dans le cadre monotone : théorème de Dini.
- Dans le cadre lipschitzien.
- Localement, dans le cadre convexe.

Préservation de la continuité. Propriétés de dérivabilité. Donc cette convergence préserve bien mieux la régularité que la convergence simple.

Théorème d'interversion de limites (ATTENTION : trouver une ref (pas énoncé dans le Gourdon)!!)

Par ailleurs (et comme attendu puisqu'on a CVU implique CVS et pas de réciproque), on a de meilleures propriétés relatives à l'intégrabilité que dans le cas de la convergence simple.

Interversion limite/intégrale sur un compact, sans hyp de positivité ni de domination explicite (la domination est en fait implicite dans l'hyp de CV uniforme) + Corollaire pour une série normalement convergente

Cette convergence est donc beaucoup plus intéressante que la convergence simple. Il est donc intéressant d'essayer d'approximer des fonctions au sens de la norme uniforme. Ça tombe bien, on a le :

Théorème de Weierstrass (approx uniforme de fonctions continues sur un segment par des polynômes).

(Remarque : On peut également approximer uniformément des fonctions avec des hypothèses de régularité moins contraignantes que la continuité : toute fonction réelle mesurable bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées.)

1.3 Application à l'étude des séries entières

Définition. Lemme d'Abel. Rayon de convergence. Règles de calcul du rayon de CV.

Convergence normale sur le disque ouvert de convergence divergence à l'extérieur, incertitude sur le bord. Exemples. Théorème de Steinhaus **[Développement]**

Somme et produit de séries entières

Continuité.

Dérivabilité et égalité du rayon de la convergence de la série et de sa dérivée. Corollaire : classe C^∞ . Expression des coefficients à l'aide des dérivées. Primitivation.

Application au calcul de développements en série entière :

- Par calcul explicite des dérivées n -ièmes + Taylor-Lagrange pour justifier l'existence du DSE (ex : cos)
- Par primitivation (ex : arctan)
- Par résolution d'une ED (ex : $x \mapsto (1+x)^\alpha$, arcsin)

Principe des zéros isolés.

2 Convergences dans les espaces de fonctions L^p

Intro : on peut voir la convergence uniforme comme une convergence pour la *norme* uniforme dans un *espace de fonctions*. Cette section généralise cette approche de "convergence dans les *espaces* de fonctions", en faisant l'étude des espaces L^p et des normes et convergences associées. On verra que cette étude permet de donner un certain nombre de résultats de densité, qui fournissent une manière d'*approximer* les fonctions d'un espace par des fonctions mieux connues, mieux maîtrisées.

2.1 Convergence presque partout de fonctions mesurables [Briane-Pagès]

Définition. Convergence presque partout = analogue de la CV simple dans les espaces de fonctions mesurables.

Préserve la mesurabilité. On a même les théorèmes d'approximation :

Toute fonction réelle mesurable positive est limite presque partout d'une suite croissante de fonctions étagées.

Toute fonction réelle mesurable est limite presque partout de fonctions étagées.

Ces propriétés permettent de construire l'intégrale de Lebesgue et d'obtenir les propriétés suivantes :

Théorème de Beppo-Lévi. Lemme de Fatou et TCD. Application à l'interversion serie/intégrale (Fubini).

2.2 Convergences dans les espaces L^p [Briane-Pagès]

Définitions : espaces \mathcal{L}^p , espaces $L^p = \text{evn}$ pour la norme p .

Théorème de Riesz-Fisher : L^p est complet pour la norme p , pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans L^p .

Sur \mathbb{R} muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, on a :

- L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans tous les espaces L^p pour $p \in [1, +\infty[$.
- L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans tous les espaces L^p pour $p \in [1, +\infty[$.

2.3 Séries de Fourier [El Amrani]

En travaillant dans les espaces de fonctions L^p , on a pu donner un certain nombre de résultats de densité, i.e. d'approximation. Dans cette partie, on s'intéresse d'un peu plus près à des fonctions qui interviennent de manière fondamentale en Physique : les fonctions périodiques. On cherche à exprimer ces fonctions sous la forme de séries de fonctions bien particulières : leurs séries de Fourier.

Remarque importante : Les résultats ci-dessous ne sont pas une application des résultats des deux sous-parties précédentes. Cependant, les objets de la théorie de Fourier sont définis dans les espaces L^p , ce qui justifie la présence de cette sous-partie ici.

Coefficients de Fourier pour les fonctions $L^1_{2\pi}$

Lemme de Riemann-Lebesgue

Série de Fourier d'une fonction $L^1_{2\pi}$. Il est intéressant de poser cette def, parce qu'on a le lemme de Riemann-Lebesgue, qui nous dit que cette quantité *peut* converger (mais attention : poser cette définition ne présume pas de la CV en général de la série!).

Noyaux de Dirichlet et de Féjer

Sommes partielles d'une série de Fourier = convolution avec le noyau de Dirichlet. Convolution avec le noyau de Féjer = moyenne de Césaro des sommes partielles.

Théorème de Féjer.

Corollaire : Si f est $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ et si sa série de Fourier converge simplement, alors sa somme coïncide avec f partout.

Contre-ex : Il existe des fonctions $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ dont la série de Fourier ne converge pas simplement ! Ces objets sont difficiles à construire explicitement, et leur existence théorique fait appel à un théorème d'analyse puissant : le théorème de Banach-Steinhaus. **[Développement]**

Autre corollaire : Densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ muni de la norme infinie et dans $L^p_{2\pi}$ muni de la norme p .

Remarque : On obtient donc que $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$ (Attention : cela suppose qu'on connaît la structure hilbertienne de L^2 ...)

Théorème de Dirichlet.

Corollaire : Si f est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux, alors elle sa série de Fourier converge uniformément vers f . On obtient une meilleure convergence (au sens de la norme infinie usuelle plutôt qu'au sens de Césaro) en renforçant les hypothèses sur la fonction.

3 Convergences de suites et séries de variables aléatoires

Les variables aléatoires sont des exemples de fonctions des espaces L^p , mais qui possèdent tellement de propriétés spécifiques qu'elles méritent une étude particulière.

3.1 Différents types de convergences spécifiques aux variables aléatoires

Différents types de convergences : presque sûre, L^p , en proba et en loi. Théorème porte-manteau. Implications et réciproques partielles.

3.2 Théorèmes limites

Borel-Cantelli

TCL

LGN

3.3 Application à l'étude des chaînes de Markov

Définition d'une chaîne de Markov (un type bien particulier de suites de variables aléatoires) et intuition (le futur ne dépend pas du passé au regard du présent).

Chaîne homogène. Noyau de transition. Loi initiale.

Equation de Chapman-Kolmogorov.

Propriétés de Markov ?

États récurrents (positifs, nuls, absorbants) et transitoires

Application : Théorème de Polya, marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z}^d . **[Développement]** Interprétation en termes de valeur d'adhérence : 0 est valeur d'adhérence presque sûre de la suite numérique obtenue en considérant une réalisation de la suite de variables aléatoires (i.e. à ω fixé, on a une valeur d'adhérence presque sûre).

4 Partie possible : convergence de suites de distributions

Les distributions généralisent la notion de fonction. Il est donc intéressant de s'intéresser aux questions de convergence de suites de distributions.