261. Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications

1 Loi d'une variable aléatoire

1.1 Définitions et premiers exemples

Def (Variable aléatoire). Barbe-Ledoux, p. 45.
Def (Loi). Barbe-Ledoux, p. 46
Def (Loi discrète). Barbe-Ledoux p. 47
Exemples classiques. Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson, Uniforme discrète
Th (Radon-Nikodym). Barbe-Ledoux, p. 31
Def (Loi à densité). Barbe-Ledoux p. 47
Exemples classiques. Uniforme, Exponentielle, Normale, Cauchy, Chi-deux (?), Normale sur R^n (pour faire la transition avec la partie suivante)

1.2 Indépendance et vecteurs aléatoires

Def (Vecteur aléatoire). On considère des variables aléatoires à valeurs dans R^n (avec $n \in \mathbb{N}$), qu'on appellera *vecteurs aléatoires.*
Def (Lois marginales). Barbe-Ledoux, p. 54
Th. La connaissance de la loi du vecteur donne la connaissance des lois marginales.
(**Mettre un exemple ?**)
Remarque. La réciproque est fausse, cf. contre-ex dans Barbe-Ledoux, p. 54. Il faut une hyp d'indépendance pour rendre cette réciproque vraie.
(**Rappel (Indépendance de variables aléatoires).** Barbe-Ledoux, p. 80 ?)
Th. Les $(X_i)i \in [\![1, n]\!]$ sont indep si et seulement si la loi du vecteur aléatoire $X = (X_i)i \in [\![1, n]\!]$ est égale au produit des lois marginales. [Barbe-Ledoux, p. 81]

2 Caractérisations dans le cas d'un vecteur aléatoire réel

CADRE. A partir de maintenant et dans toute la suite de cette leçon, on considère des vecteurs aléatoires réels.

2.1 Fonction de répartition

Def (Fonction de répartition. Barbe-Ledoux, p 48, à généraliser pour les *vecteurs* aléatoires (et pas seulement les variables)
Exemples. Donner les fonctions de répartition de lois classiques.
Prop. CADLAG [Barbe-Ledoux, p. 48, à généraliser pour les *vecteurs* aléatoires (et pas seulement les variables)]
Th. La fonction de répartition caractérise la loi. [Barbe-Ledoux, p. 49, à généraliser pour les *vecteurs* aléatoires (et pas seulement les variables)]
Application. Les lois exponentielles sont les seules lois sans mémoire.

2.2 Fonction caractéristique, transformée de Fourier

Def (Fonction caractéristique). Barbe-Ledoux p. 65

Remarque. Lien avec la transformée de Fourier dans le cas où la variable aléatoire est à densité. [Barbe-Ledoux p. 65.]

Exemples. Donner les fonctions caractéristiques de lois classiques.

Th (Injectivité). La fonction caractéristique caractérise la loi. [Barbe-Ledoux, p. 66, ou Ouvrard, pp. 193-198 pour une version plus détaillée] **[Développement ?]**

Application. Soient X et Y deux vecteurs aléatoires sur R^d tels que $\forall a \in \mathbb{R}^d$, $< X, a >$ et $< Y, a >$ ont même loi. Alors X et Y ont même loi. [Garet et Kurtzmann, p. 241]

Th (Formule d'inversion de Fourier). Barbe-Ledoux p. 67 **[Développement ?]**

2.3 Espérance

Cf. approche dans Barbe-Ledoux, pp. 64-65

Th (Th. des moments). Barbe-Ledoux p. 70

Contre-ex. Dans le cas où la va n'est pas à valeurs dans un intervalle borné : cf. Barbe-Ledoux p. 70 (pour la remarque). On peut s'affranchir de cette condition de valeurs bornées de la manière suivante.

Th. La donnée de $E(\phi(X))$ pour tout ϕ continue bornée OU C^∞ à support compact caractérise la loi de X [Barbe Ledoux, p. 65]

2.4 Transformée de Laplace pour les var positives

C'est un outil un peu moins général que les fonctions caractéristiques, mais bien adapté à l'étude des variables aléatoires réelles positives.

Def (Transformée de Laplace). Garet et Kurtzmann, p. 251

Exemples. Donner les transformées de Laplace de lois classiques.

Th (Bernstein). La transformée de Laplace caractérise la loi [Garet et Kurtzmann, p. 252] **[Développement ? Utilise pas mal de trucs liés aux proba... Cf. preuve détaillée dans GK]**

[Remarque : étude détaillée des marches aléatoires faite dans GK, pp. 254-260]

3 Suites de variables aléatoires et convergence en loi

[Ref pour toute la partie : Garet et Kurtzmann, chapitre 9, pp. 295-318]

Def (Convergence en loi). Garet et Kurtzmann p. 295

Th (Convergence ponctuelle). La CV ponctuelle implique la CV en loi [Garet et Kurtzmann p. 297].

Application. CV de la loi binomiale vers la loi de Poisson [Garet et Kurtzmann p. 297]

Th (Porte-manteau) Garet et Kurtzmann p. 299

Cor (Caractéristation de la CV en loi par les fonctions de répartition). Garet et Kurtzmann pp. 302-303

Th (Slutsky). Garet et Kurtzmann p. 305, mais attention : il existe un énoncé plus général (convergence en loi du COUPLE de v.a.)

Th (Levy). Caractérisation de la CV en loi par la CV de la suite des fonctions caractéristiques. [Garet et Kurtzmann p. 306, mais énoncé dans une version générale : à adapter aux proba, ici]

4 Simulation informatique de quelques lois classiques : méthode d'inversion

[Cette section s'appuie sur le complément de modé de JCB du 17 Septembre 2019. Lorsque des références ont été données pour les résultats, elles sont reportées ici.]

Dans cette partie, on utilise les résultats des paragraphes précédents pour proposer des méthodes de simulation informatique de lois de variables aléatoires.

Postulat : On dispose d'un ordinateur sachant modéliser une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on cherche à modéliser d'autres lois classiques à partir de ce point de départ.

Th (Simulation d'une loi uniforme). Soit $X = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_k}{2^k}$, avec $\forall k \in \mathbb{N}^*, \epsilon_k$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$. Alors X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ si et seulement si les $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont iid de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. [Ref Ouvrard. La preuve utilise les fonctions caractéristiques.]

La méthode d'inversion repose sur les notions de fonction de répartition et d'inverse généralisé.

Def (Inverse généralisé). $\forall u \in [0, 1], F^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) < u\}$.

Th (Méthode d'inversion). Soit X une variable aléatoire de loi μ sur $\mathbb{R}$ et de fonction de répartition F. Soit F^{-1} l'inverse généralisé de F. Alors si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $F^{-1}(U)$ suit la loi μ.

Exemples. Donner une liste d'exemples de génération de lois classiques à partir de lois uniformes.

5 Application à l'étude des chaînes de Markov

[Développement ?]