Théorème de Hahn Banach : différents énoncés

Clémentine Laurens

Novembre 2019

Dans toute cette fiche, si E est un espace vectoriel, E^* désigne son dual algébrique (i.e. l'ensemble des formes linéaires sur E) et E' son dual topologique (i.e. l'ensemble des formes linéaires *continues* sur E). On note par ailleurs $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Théorème (Hahn-Banach, forme algébrique réelle)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $p : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \forall \lambda > 0, \forall x \in E, p(\lambda x) = \lambda p(x) \\ \forall (x,y) \in E^2, p(x+y) \leq p(x) + p(y) \end{cases}$$

Soient G un sous-espace vectoriel de E et $g \in G^*$ tels que $\forall x \in G$, $g(x) \leq p(x)$. Alors il existe $f \in E^*$ telle que :

$$\begin{cases} f_{|G} = g \\ \forall x \in E, f(x) \leq p(x) \end{cases}$$

Théorème (Hahn-Banach, forme algébrique complexe)**.** *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soit $p : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \\ \forall (x,y) \in E^2, p(x+y) \leq p(x) + p(y) \end{cases}$$

On dit que p est une semi-norme.

Soient G un sous-espace vectoriel de E et $g \in G^*$ tels que $\forall x \in G$, $|g(x)| \leq p(x)$. Alors il existe $f \in E^*$ telle que :

$$\begin{cases} f_{|G} = g \\ \forall x \in E, |f(x)| \leq p(x) \end{cases}$$

Théorème (Hahn-Banach, forme topologique)**.** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et G un sous-espace vectoriel de E. Soit $g \in G'$ telle que :*

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x \in G, \|x\|_G \leq 1} |g(x)| < +\infty$$

Alors il existe $f \in E'$ telle que :

$$\begin{cases} f_{|G} = g \\ \|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} \end{cases}$$

Théorème (Hahn-Banach, forme géométrique)**.** *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A et B deux ensemblkes convexes disjoints de E. Alors :*

1. *Si A est ouvert, alors on peut séparer A et B au sens large par un hyperplan affine fermé ; i.e. $\exists f \in E' \backslash \{0_{E'}\}$ telle que $\sup\limits_A f \leq \inf\limits_B f$.*
2. *Si A est compact et B fermé, alors on peut séparer A et B au sens strict par un hyperplan affine fermé ; i.e. $\exists f \in E' \backslash \{0_{E'}\}$ telle que $s\sup\limits_A f < \inf\limits_B f$.*