Théorèmes d'existence en Analyse

Cours d'Ismael Bailleul,
notes de Clémentine Laurens

Novembre 2019

On donne ci-dessous une liste de méthodes utiles pour démontrer des théorèmes d'existence, et on nomme pour chacune [quelques résultats pouvant être démontrés de cette manière]. Cette liste n'est bien entendu pas exhaustive (ni en ce qui concerne les méthodes de démonstration, ni pour ce qui est des exemples fournis pour chacune d'entre elles).

- ♦ Logique
  → Démonstration par l'absurde (intérêt : on se donne une hypothèse supplémentaire, en niant l'énoncé que l'on veut démontrer)
  [Existence de la forme de Jordan pour les matrices]

- ♦ Ensembliste
  → Dénombrement
  [Théorème du point fixe de Banach ; Existence de mesures invariantes]

- ♦ Ordre
  → Utilisation du Lemme de Zorn (idée sous-jacente : généralisation « en dimension infinie » du raisonnement par récurrence, grâce à la mise en évidence d'un ensemble inductif [1])
  [Théorème de Hahn-Banach]

- ♦ Topologie
  → Raisonnement par connexité
  [Théorème de Hadamard sur les difféomorphismes globaux]
  → Utilisation de la compacité
  [Théorème des extrema liés et codiagonalisation ; Théorème de Riesz [2] ; Revue des compacts de certains espaces de fonctions : $l^p(\mathbb{N})$, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{O}(\Omega)$]

- ♦ Espaces métriques
  → Utilisation de la complétude
  [Théorème de James sur les normes d'applications linéaires ; Théorème d'Ekeland sur l'optimisation]

- ♦ Mesures
  → Utilisation des lemmes de Borel-Cantelli

- ♦ Géométrie
  → Utilisation de la convexité

1. C'est-à-dire un ensemble ayant « de bonnes propriétés » relativement à un ordre
2. Le boule unité d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est compacte si et seulement si cet espace vectoriel est de dimension finie.