COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE SUITES ET DE FONCTIONS

Fiche de révision de Mathématiques,
réalisée par Clémentine Laurens à partir du cours de M. Alain Troesch

Dans toute cette fiche, on pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, et f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Pour ce qui est des fonctions, on prend $a \in \overline{\overline{X}}$.

	Cas des suites	**Cas des fonctions**
Domination, grand $\boldsymbol{O}$: notations et définitions	Notation : $u_n = O(v_n)$	Notation : $f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big)$
	$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,$ $\boldsymbol{\lvert u_n\rvert \leq M \cdot \lvert v_n\rvert}$	$\exists U \in \mathcal{V}(a),\ \exists k \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in U \cap X,$ $\boldsymbol{\lvert f(x)\rvert \leq k \cdot \lvert g(x)\rvert}$
	$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée	Si a est fini : $\exists \eta > 0,\ \exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in X,$ $\lvert x-a\rvert < \eta \Longrightarrow \lvert f(x)\rvert \leq k \cdot \lvert g(x)\rvert$
		Si $a = +\infty$: $\exists B > 0,\ \exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in X,$ $x > B \Longrightarrow \lvert f(x)\rvert \leq k \cdot \lvert g(x)\rvert$
		Si g ne s'annule pas au voisinage de a : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Négligeabilité, petit $\boldsymbol{o}$: notations et définitions	Notation : $u_n = o(v_n)$	Notation : $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$
	$\exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geq n_0,$ $\boldsymbol{u_n = \epsilon_n \cdot v_n \quad \textbf{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0}$	$\forall \epsilon > 0,\ \exists U \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in U \cap X,$ $\boldsymbol{\lvert f(x)\rvert \leq \epsilon \cdot \lvert g(x)\rvert}$
		Si a est fini : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,$ $\lvert x - a\rvert < \eta \Longrightarrow\ \lvert f(x)\rvert \leq \epsilon \cdot \lvert g(x)\rvert$
	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$	Si $a = +\infty$ alors : $f\forall \epsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in X,$ $x > B \Longrightarrow\ \lvert f(x)\rvert \leq \epsilon \cdot \lvert g(x)\rvert$
		Si g ne s'annule pas au voisinage de a : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
Equivalence, $\sim$: notations et définitions	Notation : $u_n \sim v_n$	Notation : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$
	$\exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geq n_0,$ $\boldsymbol{u_n = \alpha_n \cdot v_n \quad \textbf{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1}$	$\boldsymbol{\lvert f - g\rvert \underset{x\to a}{=} o(g)}$
	$u_n = v_n + o(v_n)$	
	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$	Si g ne s'annule pas au voisinage de a : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Propriétés remarquables	$u_n = O(1) \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $u_n = o(1) \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff u_n = l + o(1)$	
Croissances comparées	• $\forall \alpha > 0,\ \ ln(n) = o(n^\alpha)$ • $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ n^\alpha = o(e^n)$ • $n! = o(n^n)$ • $\forall a \in \mathbb{R},\ \ a^n = o(n!)$ • $\forall a < b,\ \ n^a = o(n^b)$	• $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ ln^\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$ • $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \gamma \in \mathbb{R}_+^*,$ $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(\exp(\gamma x^\beta))$ • $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ ln^\beta(x) \underset{x\to+0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ • $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \beta,\ \ x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$ • $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \beta,\ \ x^\beta \underset{x\to0}{=} o(x^\alpha)$