Critère et transformation d'Abel pour les séries numériques

Fiche de révisions de Mathématiques,
réalisée par Clémentine Laurens a partir du cours de M. Alain Troesch

Le critère d'Abel généralise le critère spécial de convergence des series alternées. Il a notamment l'avantage, contrairement à ce dernier, d'être utilisable dans le cas complexe. Attention toutefois : cette propriété est hors programme en classes préparatoires, et doit donc être redémontrée à chaque utilisation.

Théorème 1 (Critère d'Abel). *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que :*

- *La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit réelle, décroissante et de limite nulle.*
- *La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit telle que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée.*

Alors $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration. On effectue une **transformation d'Abel** :

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} a_n b_n &= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) \\
&= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=1}^{N} a_n B_{n-1} \\
&= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n \\
&= a_0 b_0 + a_N B_N - a_1 b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N B_N
\end{aligned}$$

Or, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Donc $a_N B_N$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

Par conséquent, $\sum a_n b_n$ converge si et seulement si $\sum (a_n - a_{n+1}) B_n$ converge.

Soit M un majorant de $(|B_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |(a_n - a_{n+1}) B_n| \leq |a_n - a_{n+1}| \, M$$

i.e.

$$0 \leq |(a_n - a_{n+1}) B_n| \leq (a_n - a_{n+1}) M$$

car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Or, la série $\sum (a_n - a_{n+1})$ est de même nature que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: elle est donc convergente. Donc $\sum (a_n - a_{n+1})M$ est une série à termes positifs convergente.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum (a_n - a_{n+1})B_n$ est absolument convergente.

Donc $\sum a_n b_n$ converge.

$\square$

Un exemple très classique :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Alors pour tout $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, $\sum a_n e^{in\theta}$ converge. En effet :

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} \right| &= \left| \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \\
&\leq \frac{1 + \left| e^{i(N+1)\theta} \right|}{\left| 1 - e^{i\theta} \right|} \\
&\leq \frac{2}{\left| 1 - e^{i\theta} \right|}
\end{aligned}$$

La suite des sommes partielles de $\sum e^{in\theta}$ est donc bornée : on retrouve bien les conditions d'application du critère d'Abel. D'où la convergence de $\sum a_n e^{in\theta}$. $\square$