Équations différentielles

Clémentine Laurens, à partir du cours de Jean-Pierre Roudneff

Dans tout ce document, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $p \in \mathbb{N}^*$.

1 Position de l'étude, méthode générale et notations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient $\beta \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $(\alpha_i)_{i \in [\![0,p]\!]} \in \left(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})\right)^{p+1}$.

On souhaite résoudre l'équation différentielle d'ordre p suivante :

$$\forall x \in I, \quad \alpha_p(x) \cdot y^{(p)}(x) + \alpha_{p-1}(x) \cdot y^{(p-1)}(x) + \cdots + \alpha_1(x) \cdot y'(x) + \alpha_0(x) \cdot y(x) = \beta(x) \qquad (E_0)$$

c'est-à-dire déterminer l'ensemble des fonctions $y \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ vérifiant (E_0).

Pour ce faire, on appliquera toujours la méthode suivante :

1. Se placer sur des intervalles $J \subset I$ tels que, $\forall x \in J, \ \alpha_p(x) \neq 0$.
2. Résoudre (E_0) sur de ces intervalles.
3. Raccorder les solutions aux bornes (raccordements de classe $\mathcal{C}^p$).

L'intérêt de se placer sur de tels intervalles J est que cela permet de « normaliser » l'équation différentielle (E_0), c'est-à-dire de se ramener à une équation différentielle de la forme :

$$\forall x \in J, \quad y^{(p)}(x) + a_{p-1}(x) \cdot y^{(p-1)}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x) \qquad (E)$$

en posant $\forall i \in [\![0, p-1]\!], \ a_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_p} \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{K})$ et $b = \frac{\beta}{\alpha_p} \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{K})$ (ces fonctions étant bien définies sur tout intervalle J de la forme décrite ci-dessus).

Pour toute la suite de ce document, on pose donc J un intervalle de $\mathbb{R}$, $b \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{K})$ et $(a_i)_{i \in [\![0,p-1]\!]} \in \left(\mathcal{C}^0(J, \mathbb{K})\right)^p$, et on cherche à déterminer les fonctions $y \in \mathcal{C}^p(J, \mathbb{K})$ vérifiant l'équation différentielle normalisée d'ordre p :

$$\forall x \in J, \quad y^{(p)}(x) + a_{p-1}(x) \cdot y^{(p-1)}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x) \qquad (E)$$

d'équation homogène associée :

$$\forall x \in J, \quad y^{(p)}(x) + a_{p-1}(x) \cdot y^{(p-1)}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0 \qquad (H)$$

En vertu de ce qui précède, on peut toujours se ramener à un tel problème, au prix d'éventuels raccordements aux bornes des solutions trouvées : ces conditions et notations ne restreignent donc pas la généralité de l'étude.

2 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz numérique). *L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension p, et l'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est un espace affine de dimension p.*

De plus, $\forall x_0 \in J$, $\forall(\gamma_0, \cdots, \gamma_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ fixés, il existe une unique solution y de (E) vérifiant les conditions de Cauchy :

$$\forall i \in [\![0, p-1]\!],\ y^{(i)}(x_0) = \gamma_i$$

De ce théorème découle le suivant, non moins essentiel pour la recherche effective des solutions d'une équation différentielle donnée.

Théorème 2. *Soit y_p est une solution particulière de (E). Alors l'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) s'écrit :*

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{y_h + y_p \mid y_h \in \mathcal{S}_H\}}$$

où $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E).

3 Équations différentielles à coefficients constants

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas où les fonctions $(a_i)_{i\in[\![0,p-1]\!]}$ sont constantes. Notons : $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $\forall x \in J$, $a_i(x) = A_i$ avec $(A_i)_{i\in[\![0,p-1]\!]} \in \mathbb{K}^p$.

On cherche donc à résoudre l'équation différentielle :

$$\forall x \in J,\quad y^{(p)}(x) + A_{p-1} \cdot y^{(p-1)}(x) + \cdots + A_1 \cdot y'(x) + A_0 \cdot y(x) = b(x) \qquad (E)$$

d'équation homogène associée :

$$\forall x \in J,\quad y^{(p)}(x) + A_{p-1} \cdot y^{(p-1)}(x) + \cdots + A_1 \cdot y'(x) + A_0 \cdot y(x) = 0 \qquad (H)$$

3.1 Résolution de l'équation homogène

Notons χ le polynôme caractéristique de l'équation (H) :

$$\chi(X) = X^p + A_{p-1} \cdot X^{p-1} + \cdots + A_1 \cdot X + A_0$$

Notons de plus $Rac(\chi) = (\lambda_i)_{i\in[\![1,d]\!]}$, et $\forall i \in [\![1, d]\!]$, notons m_i la multiplicité de λ_i en tant que racine de χ. Alors :

Théorème 3. *L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène (H) est :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto \sum_{i=1}^d S_i(x) \cdot e^{\lambda_i x} \;\middle|\; \forall i \in [\![1, d]\!],\ S_i \in \mathbb{K}_{m_i-1}[X]\right\}}$$

3.2 Recherche d'une solution particulière dans la cas où le second membre b est de la forme $x \mapsto P(x) \cdot e^{\mu x}$

Supposons que $\forall x \in J$, $b(x) = P(x) \cdot e^{\mu x}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Notons r la multiplicité de μ en tant que racine de χ (polynôme caractéristique de l'équation (H)). Par convention, $r = 0$ si μ n'est pas racine de χ.

Alors on recherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y : x \mapsto Q(x) \cdot e^{\mu x}$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $deg(Q) = deg(P) + r$.

4 Un cas (très) particulier : les équations d'Euler

Une équation d'Euler est une équation différentielle de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A_p \cdot x^p \cdot y^{(p)}(x) + A_{p-1} \cdot x^{p-1} \cdot y^{(p-1)}(x) + \cdots + A_1 \cdot x \cdot y'(x) + A_0 \cdot y(x) = b(x) \qquad (E)$$

avec $(A_i)_{i \in [\![0,p]\!]} \in \mathbb{K}^{p+1}$ et $b \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{K})$.

Pour déterminer les solutions d'une telle équation différentielle, on appliquera toujours la méthode suivante :

1. Quitte à raccorder ultérieurement les solutions trouvées en 0, se placer sur $J = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$.
2. Poser $\epsilon = 1$ si $J = \mathbb{R}_+$ et $\epsilon = -1$ si $J = \mathbb{R}_-$. Poser alors le changement de variable (bijectif de J sur $\mathbb{R}$) : $x = \epsilon \cdot e^t$. Poser enfin : $\forall x \in J,\ y(x) = y(\epsilon \cdot e^t) = z(t)$.
3. On montre alors que $\forall t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = x \cdot y'(x)$, $z''(t) = x^2 \cdot y''(x)$ etc.
4. En combinant les résultats des calculs de la ligne précédente sous l'hypothèse que y vérifie l'équation (E), on se ramène à une équation différentielle en la variable fonctionnelle z sur $\mathbb{R}$ tout entier, et on constate que cette équation différentielle est cette fois-ci **à coefficients constants**. On se ramène donc à l'étude menée dans le paragraphe précédent.

5 Équations différentielles à coefficients quelconques

On se limitera, dans ce paragraphe, à la résolution des équations différentielles à coefficients quelconques d'ordres 1 et 2.

5.1 ORDRE 1

Dans cette section, on s'intéresse au cas $p = 1$, i.e. on recherche les solutions de l'équation différentielle :

$$\forall x \in J, \quad y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x) \qquad (E)$$

d'équation homogène associée :

$$\forall x \in J, \quad y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0 \qquad (H)$$

5.1.1 Résolution de l'équation homogène

Théorème 4. *Soit $x_0 \in J$. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène (H) est :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto \lambda \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_0(t)dt} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}}$$

5.1.2 Recherche d'une solution particulière : méthode de la variation de la constante

Soit $x_0 \in J$. On recherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y_p : x \mapsto \lambda(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_0(t)dt}$$

avec $\lambda \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{K})$.

5.2 ORDRE 2

Dans cette section, on s'intéresse au cas $p = 2$, i.e. on recherche les solutions de l'équation différentielle :

$$\forall x \in J, \quad y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x) \qquad (E)$$

d'équation homogène associée :

$$\forall x \in J, \quad y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0 \qquad (H)$$

5.2.1 Résolution de l'équation homogène : wronskien

On suppose connues deux solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène (H).

On définit le wronskien W par :

$$\forall x \in J, \ W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Alors :

Théorème 5.

- *Soit (y_1, y_2) est liée, et dans ce cas $W \equiv 0$ sur J.*
- *Soit (y_1, y_2) est libre, et dans ce cas $\forall x \in J, \ W(x) \neq 0$.*

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on obtient donc que :

Théorème 6. *Si $\exists x_0 \in J$ tel que $W(x_0) \neq 0$, alors l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est :*

$$\mathcal{S}_H = Vect(y_1, y_2)$$

(i.e. (y_1, y_2) est une base de l'ensemble des solutions de (H)).

5.2.2 Recherche d'une solution particulière : méthode de la variation des constantes

On suppose connue une base (y_1, y_2) de l'ensemble des solutions de (H). On recherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y_p : x \mapsto \lambda_1(x) \cdot y_1(x) + \lambda_2(x) \cdot y_2(x)$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{K})$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1' \cdot y_1 + \lambda_2' \cdot y_2 & = & 0 \\ \lambda_1' \cdot y_1' + \lambda_2' \cdot y_2' & = & b \end{array} \right.$$

6 Résolution des équations homogènes à coefficients non constants d'ordre p : wronskien (cas général)

On cherche ici à résoudre l'équation homogène :

$$\forall x \in J, \quad y^{(p)}(x) + a_{p-1}(x) \cdot y^{(p-1)}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0 \qquad (H)$$

On suppose connues p solutions de cette équation homogène, qu'on note $(y_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$.

On définit alors le wronskien W par :

$$\forall x \in J, \; W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) & \cdots & y_1^{(p-1)}(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) & \cdots & y_2^{(p-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_p(x) & y_p'(x) & \cdots & y_p^{(p-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Alors :

Théorème 7.

- *Soit* $(y_1, \cdots, y_p)$ *est liée, et dans ce cas* $W \equiv 0$ *sur* J.
- *Soit* $(y_1, \cdots, y_p)$ *est libre, et dans ce cas* $\forall x \in J, \; W(x) \neq 0$.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on obtient donc que :

Théorème 8. *Si* $\exists x_0 \in J$ *tel que* $W(x_0) \neq 0$, *alors l'ensemble* $\mathcal{S}_H$ *des solutions de* (H) *est :*

$$\mathcal{S}_H = Vect(y_1, \cdots, y_p)$$

(i.e. $(y_1, \cdots, y_p)$ *est une base de l'ensemble des solutions de* (H)*).*