Familles sommables : fiche récapitulative

Clémentine Laurens, à partir du cours de Jean-Pierre Roudneff

1 Familles de réels positifs

Définition 1. *Soient I un ensemble quelconque, et $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est dite sommable si et seulement si $\left\{ \sum_{j\in J} a_j \;\middle|\; J fini \subset I \right\}$ est majoré. On pose alors :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J fini \subset I} \left\{ \sum_{j\in J} a_j \right\}$$

Propriété 1. *Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors $(a_i)_{i\in I}$ est à support au plus dénombrable (i.e. $\{i \in I \mid a_i > 0\}$ est au plus dénombrable).*

Dans la suite de cette section, on considère donc un ensemble I au plus dénombrable, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

Définition 2. *Une suite exhaustive $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de I est une suite de parties finies de I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \subset J_{n+1}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$.*

Propriété 2 (Caractérisation par les suites exhaustives)**.** *Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de parties de I. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable **si et seulement si** la suite $\left(\sum_{j\in J_n} a_j \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas, $\sum_{i\in I} a_i$ est égale à la limite de cette suite et cette limite ne dépend pas de la suite exhaustive choisie.*

Corollaire (Convergence commutative pour les SATP)**.** *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels positifs, alors la série $\sum a_n$ converge **si et seulement si** $\forall \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, $\sum a_{\phi(n)}$ converge (et les sommes de toutes ces séries sont alors égales, quelle que soit la bijection ϕ considérée).*

Propriété 3 (Caractérisation par l'associativité)**.** *Soit $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de I deux à deux disjointes, telle que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k = I$. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable **si et seulement si** $\forall k \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable. Dans ce cas, $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in i_k} a_i \right)$ converge, et :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in i_k} a_i \right).$$

2 Familles de complexes quelconques

Dans cette section, I désigne de nouveau un ensemble au plus dénombrable.

Définition 3. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels quelconques. On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(\mid a_i \mid)_{i\in I}$ est sommable.*

Propriété 4. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels quelconques. Alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(a_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables. On pose alors :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- .$$

Définition 4. *Soit $(z_i)_{i\in I}$ une famille de complexes quelconques. On dit que la famille $(z_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(\mid z_i \mid)_{i\in I}$ est sommable.*

Propriété 5. *Soit $(z_i)_{i\in I}$ une famille de complexes quelconques. Alors la famille $(z_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(Re\,(z_i))_{i\in I}$ et $(Im\,(z_i))_{i\in I}$ sont sommables. On pose alors :*

$$\sum_{j\in I} z_j = \left(\sum_{j\in I} Re\,(z_j)\right) + i\left(\sum_{j\in I} Im\,(z_j)\right).$$

Propriété 6 (Suites exhaustives)**.** *Soient $(z_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes, et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de parties de I. Alors la suite $\left(\sum_{j\in J_n} z_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et $\sum_{i\in I} z_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in J_n} z_i$.*

Propriété 7 (Associativité)**.** *Soient $(z_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes, et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de I deux à deux disjointes, telle que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k = I$. Alors $\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_k} z_i\right)$ converge, et :*

$$\sum_{i\in I} z_i = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_k} z_i\right)$$

Attention : Dans ces deux dernières propriétés, il s'agit d'une implication, et non plus d'une équivalence, comme c'était le cas avec les familles de réels positifs !

3 Familles doublement indexées

Théorème 1. *Une famille de complexes quelconques $(a_{p,q})_{(p;q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si :*

- *$\forall p\in\mathbb{N}$, la famille $(a_{p,q})_{q\in\mathbb{N}}$ est sommable.*
- *$\sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{q=0}^{+\infty} \mid a_{p,q} \mid$ converge.*

Théorème 2 (Fubini)**.** *Soit $(a_{p,q})_{(p;q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille sommable de complexes quelconques. Alors :*

$$\begin{aligned}\sum_{(p;q)\in\mathbb{N}^2} a_{p,q} &= \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}\\ &= \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}\end{aligned}$$