FORMULES DE TAYLOR
ET DEVELOPPEMENTS LIMITES

Fiche de révision de Mathématiques,
réalisée par Clémentine Laurens à partir du cours de M. Alain Troesch

I. Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste-intégral à l'ordre n au point a :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\forall x \in [a, b], \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a, évaluée en b :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n}$ sur $[a, b]$, et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[, \qquad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Il découle immédiatement de cette formule l'<u>inégalité de Taylor-Lagrange</u>, très utile dans bien des situations :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n}$ sur $[a, b]$, et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$ telle que $\left|f^{(n+1)}\right| \leq M$ sur $]a, b[$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{M \,.\, |b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0 :
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n}$ au voisinage de x_0. Alors

$\exists$

$$f(x) =_{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x-x_0)^n)$$

II. Développements limités usuels

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$e^x =_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$ln(x+1) =_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\, x^k}{k} + o(x^n)$$

$$sin(x) =_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + o(x^{2n+2})$$

$$cos(x) =_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)\,!} + o(x^{2n+1})$$

$$arctan(x) =_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + o(x^{2n+1})$$

$$sh(x) =_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + o(x^{2n+2})$$

$$ch(x) =_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha =_0 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)\, x^k}{k\,!} + o(x^n)$$

Cas particuliers importants de cette dernière formule :

$$\frac{1}{1-x} =_0 \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} =_0 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k + o(x^n)$$