Géométrie : quelques équations classiques à savoir reconnaître

Fiche de révisions de Mathématiques, réalisée par Clémentine Laurens

« *Faites une figure !* », JPR

1 Géométrie dans le plan euclidien à deux dimensions

On munit le plan euclidien à deux dimensions $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (isomorphe au plan complexe $\mathbb{C}$), d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

Équation 1 (Droite)**.** *Soit* $(a, b) \in (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$*. Alors l'équation :*

$$\boxed{y = ax + b}$$

est l'équation d'une droite d'ordonnée à l'origine b *et de coefficient directeur* a*.*

Équation 2 (Cercle)**.** *Soient* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $r \in \mathbb{R}_+$*. Alors l'équation :*

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

est l'équation d'un cercle de centre $M(a, b)$ *et de rayon* r*.*

Équation 3 (Parabole)**.** *Soit* $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$*. Alors l'équation :*

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

est l'équation d'une parabole de sommet $M\left(\left(\frac{-b}{2a}\right), \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c\right)\right)$.

Équation 4 (Ellipse)**.** *Soient* $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *et* $(u, v) \in \mathbb{R}^2$*. Alors l'équation :*

$$\boxed{\left(\frac{x-u}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-v}{b}\right)^2 = 1}$$

est l'équation d'une ellipse de centre $M(u, v)$ *dont le petit axe et le grand axe sont parallèles aux axes du repère, et telle que la distance entre le centre de l'ellipse à l'un de ses foyers vaille* $\sqrt{a^2 - b^2}$*.*

Équation 5 (Hyperbole)**.** *Soit* $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$*. Alors l'équation :*

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$$

est l'équation d'une hyperbole dont les axes de symétrie sont les axes du repère, l'axe transverse étant l'axe des abscisses.

2 Géométrie dans l'espace euclidien à trois dimensions

On munit l'espace à trois dimensions $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$

Équation 6 (Sphère)**.** *Soient* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *et* $r \in \mathbb{R}_+^*$*. Alors l'équation :*

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}$$

est l'équation d'une sphère de centre $M(a, b, c)$ *et de rayon* r*.*

Équation 7 (Plan)**.** *Soit* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *où* a*,* b *et* c *ne sont pas tous nuls. Alors l'équation :*

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

est l'équation d'un plan de vecteur normal (a, b, c)*.*

3 Hyperplans en dimension quelconque

Définition/Propriété (Hyperplan)**.** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension quelconque (finie ou infinie). Un sous-espace vectoriel* H *de* E *est un hyperplan de* E *si et seulement s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

— H *est de codimension* 1*.*
— *Il existe dans* E *une droite vectorielle* $\mathcal{D}$ *supplémentaire de* H*.*
— H *est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*