Inégalité(s) de Cauchy-Schwarz

Clémentine Laurens

1 Énoncé général

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel*[1]*. Soit $||\cdot||$ la norme euclidienne associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$*[2]*. Alors :*

$$\boxed{\forall\, (x, y) \in E^2,\ |\langle x|y\rangle| \ \leq\ ||x|| \cdot ||y||}$$

Une astuce pour retenir ce résultat consiste à se placer dans $E = \mathbb{R}^2$. On a alors, $\forall\, (x, y) \in E^2$, en notant (x, y) l'angle entre les vecteurs x et y. :

$$\begin{aligned} |\langle x|y\rangle| &= |\ ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos\left((x, y)\right)\ | \\ &= ||x|| \cdot ||y|| \cdot |\ \cos\left((x, y)\right)\ | \\ &\leq ||x|| \cdot ||y|| \end{aligned}$$

2 Cas particuliers classiques

Théorème 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz numérique). *En se plaçant sur $E = \mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) muni du produit scalaire usuel $(x, y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \mapsto \langle x|y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, on obtient :*

$$\boxed{\forall \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \ \leq\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \ \cdot\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}}$$

Théorème 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale, version "intégrale sur un segment"). *En se plaçant sur $E = \mathcal{C}([a, b]\,, \mathbb{R})$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient :*

$$\boxed{\forall\, (f, g) \in \left(\mathcal{C}([a, b]\,, \mathbb{R})\right)^2,\ \left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \ \leq\ \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t} \ \cdot\ \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}}$$

1. On rappelle que cela signifie que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$
2. On rappelle que cela signifie que $\forall x \in E$, $||x|| = \langle x|x\rangle$, ceci définissant bien une norme sur E.

Théorème 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale, version "intégrale sur un intervalle quelconque")**.** *En se plaçant sur l'espace $E = \mathcal{L}_2(I,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}\,(I,\mathbb{R})\}$ des fonctions* ***continues de carré intégrable*** *sur I (avec I un intervalle réel quelconque) muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \langle f|g\rangle = \displaystyle\int_I fg$, on obtient :*

$$\boxed{\forall\,(f,g) \in \left(\mathcal{L}_2(I,\mathbb{R})\right)^2,\ \left|\int_I fg\right| \ \leq\ \sqrt{\int_I f^2}\ \cdot\ \sqrt{\int_I g^2}}$$