Clémentine LAURENS
Année scolaire 2014-2015 – MPSI 4

Méthode : primitivation des fractions rationnelles

Dans l'ensemble de ce document, la notation → correspond à la primitivation de l'expression dont il est question.

Pour pouvoir primitiver n'importe quelle fraction rationnelle par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$, il suffit de savoir comment aborder chacun des quatre cas suivants.

Cas n°1 : Expression de la forme :

$$\frac{1}{x-r} \to ln|x-r|$$

Cas n°2 : Expression de la forme :

$$\frac{1}{(x-r)^{\alpha}} \to \frac{-1}{\alpha-1} \times \frac{1}{(x-r)^{\alpha-1}}$$

où $\alpha > 1$

Cas n°3 : Expression de la forme :

$$\frac{ax+b}{x^2+cx+d}$$

On écrit cette fraction sous la forme :

$$\frac{ax+b}{x^2+cx+d} = \frac{\frac{a}{2} \times (2x+c) + e}{x^2+cx+d}) = \frac{a}{2} \times \frac{P'(x)}{P(x)} + \frac{e}{x^2+cx+d}$$

où $P(x) = x^2 + cx + d$

On primitive alors de la manière suivante :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} \to ln|P(x)|$$

Puis pour primitiver $\frac{e}{x^2+cx+d}$ on se ramène à $\frac{e}{y^2+1}$ par un changement de variable (il s'agit d'une mise sous forme canonique du dénominateur) :

$$\frac{e}{y^2+1} \rightarrow \quad e \times Arctan\,(y)$$

Cas n°4 : Expression de la forme :

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k}$$

où $k > 1$

Comme pour le cas n°3, on écrit cette fraction sous la forme :

$$\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k} = \frac{a}{2} \times \frac{P'(x)}{P(x)^k} + \frac{e}{(x^2+cx+d)^k}$$

$$\text{où } P(x) = x^2+cx+d$$

On primitive alors de la manière suivante :

$$\frac{P'(x)}{P(x)^k} \rightarrow \frac{-1}{k-1} \times \frac{1}{P(x)^{k-1}}$$

Puis pour primitiver $\frac{e}{P(x)^k}$ on se ramène à $e \times \frac{1}{(y^2+1)^k}$ par changement de variable. On pose alors :

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$$

Puis on abaisse le degré par IPP, jusqu'à ce qu'on soit ramené au cas n°3 :

$$\begin{aligned} I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \int \frac{1+y^2-y^2}{(y^2+1)^k}\,dy = \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}dy - \int \frac{y^2}{(1+y^2)^k}\,dy \\ = I_{k-1} - \int \frac{y^2}{(1+y^2)^k}\,dy \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} I_k = I_{k-1} - \left[\frac{-y}{2(k-1)} \times \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\right] + \int \frac{-1}{2(k-1)(1+y^2)^{k-1}}dy \\ = I_{k-1} - \left[\frac{-y}{2(k-1)} \times \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\right] - \frac{1}{2(k-1)} I_{k-1} \end{aligned}$$

(Les intégrales I_k peuvent donc se calculer de proche en proche.)