Produit matriciel

Fiche récapitulative des différentes descriptions du produit matriciel et de quelques formules classiques de calcul

Dans ce document, toutes, les matrices sont à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Elles sont désignées par des lettres majuscules, leurs coefficients respectifs par les mêmes lettres en minuscules. On prendra garde à n'appliquer ces formules que dans le cas où ***les matrices sont de formats compatibles pour le produit****, ce qu'on suppose toujours vrai ici.*

Différentes descriptions du produit matriciel :

Description du produit matriciel par les colonnes :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{array}\right) \times \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c|c} \cdots & \cdots & \begin{matrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \cdots \\ b_{p,j} \end{matrix} & \cdots \end{array}\right) \\ \textit{j-ième colonne} \end{array} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c|c} \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^{p} b_{i,j} C_i & \cdots \end{array}\right) \\ \textit{j-ième colonne} \end{array}$$

Description du produit matriciel par les lignes :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \cdots \\ \hline A_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 \\ \hline \cdots \\ \hline B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 . B \\ \hline \cdots \\ \hline A_n . B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} B_i \\ \hline \cdots \\ \hline \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} B_i \end{pmatrix}$$

Cas particulier courant du produit d'une matrice par une matrice colonne :

Produit d'une matrice par une matrice colonne :

⤑ Description par les colonnes :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{array}\right) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} x_i C_i$$

⤑ Description par les lignes :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline \cdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 . X \\ \hline \cdots \\ \hline A_n . X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}\, x_j \\ \hline \cdots \\ \hline \sum_{j=1}^{p} a_{n,j}\, x_j \end{pmatrix}$$

Quelques formules classiques de calcul matriciel :

Formule du binôme :
Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $AB = BA$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Factorisation de $\boldsymbol{A^n - B^n}$:
Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $AB = BA$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

Un cas particulier de cette dernière formule :
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n - B^n = (I_n - B) \sum_{k=0}^{n-1} B^k$$

Clémentine LAURENS
Année scolaire 2014-2015 – MPSI 4