# Structures algébriques

Sauf mention contraire, dans le tableau ci-dessous, les lois de composition sont des lois internes.

| **Nom de la structure** | **Notation usuelle**<br>**(ensemble et loi(s) de composition)** | **Axiomes** |
|---|---|---|
| Magma | $(E, \star)$ | $\emptyset$ |
| Monoïde | $(E, \star)$ | - Associativité de $\star$.<br>- Existence d'un neutre. |
| Groupe | $(G, \star)$ | - Associativité de $\star$.<br>- Existence d'un neutre.<br>- Existence de symétriques. |
| Groupe abélien<br>(ou groupe commutatif) | $(G,\star)$ | - $(G,\star)$ est un groupe.<br>- $\star$ est commutative. |
| Anneau | $(A, +, \times)$ | - $(A, +)$ est un groupe abélien.<br>- $(A, \times)$ est un monoïde.<br>- $\times$ est distributive sur $+$. |
| Anneau commutatif | $(A, +, \times)$ | - $(A, +, \times)$ est un anneau.<br>- $\times$ est commutative. |
| Anneau intègre | $(A, +, \times)$ | $(A, +, \times)$ est un anneau non nul qui ne contient aucun diviseur de zéro. |
| Corps | $(K, +, \times)$ | - $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif.<br>- $(K^*, \times)$ est un groupe.<br><br>i.e.<br><br>- $(K, +)$ est un groupe abélien.<br>- $(K^*, \times)$ est un groupe abélien.<br>- $\times$ est distributive sur $+$. |
| Corps gauche ou anneau à divisions | $(K, +, \times)$ | - $(K, +, \times)$ est un anneau NON commutatif.<br>- $(K^*, \times)$ est un groupe. |
| Corps premier | $(K, +, \times)$ | $(K, +, \times)$ est un corps qui ne contient aucun sous-corps autre que lui-même. |
| K-espace vectoriel<br>(où K est un corps) | $(E, +, \cdot)$<br>*où :*<br>- $+$ est une loi de composition interne.<br>- $\cdot$ est une loi de composition externe. | - $(E, +)$ est un groupe abélien.<br>- $\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in K^2$ :<br>• $(\lambda\mu)\, x = \lambda(\mu x)$<br>• $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$<br>• $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$<br>• $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ |
| K-algèbre<br>(où K est un corps) | $(A, +, \times, \cdot)$<br>*où :*<br>- $+$ et $\times$ sont des lois de composition internes.<br>- $\cdot$ est une loi de composition externe. | - $(A, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel.<br>- $(A, +, \times)$ est un anneau.<br>- $\forall (x,y) \in A^2, \forall \lambda \in K$ :<br>$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y$<br>$= x \times (\lambda \cdot y)$ |



*Clémentine LAURENS*
*Année scolaire 2015-2016– MP5*

## Sous-structures algébriques :

**Caractérisation des sous-groupes :**
Un sous-ensemble H d'un groupe $(\mathrm{G},+)$ est un sous-groupe de G si et seulement si :

(i) H est non vide (on vérifie par exemple que le neutre de G est dans H).
(ii) $\forall(x,y) \in \mathrm{H}^2, (x-y) \in \mathrm{H}$

Quelques sous-groupes spécifiques :

**Sous-groupe propre :**
Soit G un groupe. Un sous-groupe propre de G est un sous-groupe de G distinct de $\{e_G\}$ et de G ($e_G$ étant le neutre de G).

**Sous-groupe monogène :**
Soit G un groupe multiplicatif, et soit $x \in G$. H est un sous-groupe monogène de G si et seulement si :

$$H = \{x^n, n \in Z\}$$

(certains éléments de cet ensemble pouvant être égaux).

**Sous-groupe distingué (ou sous-groupe normal) :**
Soit G un groupe. H est un sous-groupe distingué (ou normal) de G si et seulement si une des deux propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :
(i) $\forall a \in \mathrm{G}, a\mathrm{H} = \mathrm{H}a$
(ii) $\forall a \in \mathrm{G}, \forall h \in \mathrm{H}, aha^{-1} \in \mathrm{H}$

**Caractérisation des sous-anneaux:**
Un sous-ensemble B d'un anneau $(\mathrm{A},+,\times)$ est un sous-anneau de A si et seulement si :

(i) $1_\mathrm{B} \in \mathrm{A}$
(ii) $\forall(x,y) \in \mathrm{B}^2, (x-y) \in \mathrm{B}$
(iii) $\forall(x,y) \in \mathrm{B}^2, (x \times y) \in \mathrm{B}$

**Idéal d'un anneau commutatif :**
Soit A un anneau commutatif. Un sous-ensemble I de A est un idéal de A si et seulement si I est un sous-groupe du groupe (A +) et si, pour tout a $\in$ I et pour tout $\lambda \in$ A, $\lambda$a $\in$ I.

**Caractérisation des sous-corps:**
Un sous-ensemble L d'un corps $(\mathrm{K},+,\times)$ est un sous-corps de K si et seulement si :

(i) $1_\mathrm{K} \in \mathrm{L}$
(ii) $\forall(x,y) \in \mathrm{L}^2, (x-y) \in \mathrm{L}$
(iii) $\forall(x,y) \in \mathrm{L}^2 (x \times y^{-1}) \in \mathrm{L}$

**Caractérisation des sous-espaces vectoriels:**
Un sous-ensemble F d'un K-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $0_E \in F$
(ii) F est stable par combinaison linéaire, i.e. :

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in K, (\lambda \cdot x + y) \in F$$

**Caractérisation des sous-algèbres:**
Un sous-ensemble F d'une algèbre $(A, +, \times, \cdot)$ est une sous-algèbre de A si et seulement si :

(i) $1_K \in F$
(ii) $\forall (x, y) \in A^2 (x \times y) \in F$
(iii) $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in K, (\lambda \cdot x + y) \in F$



*Clémentine LAURENS*
*Année scolaire 2015-2016– MP5*