Rédaction d'un exercice classique : Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

Clémentine LAURENS

Exercice. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant une espérance finie notée $\mathbb{E}(X)$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.*

Résolution. *Par définition (et sachant que ces objets existent) :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \mathbb{P}(X = n) \\ &= \boxed{\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} n \cdot \mathbb{P}(X = n) \right)}\end{aligned}$$

Or, $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n \cdot \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=0}^{N} n \cdot (\mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X \geqslant n+1)) \\ &= \sum_{n=0}^{N} n \cdot \mathbb{P}(X \geqslant n) - \sum_{n=0}^{N} n \cdot \mathbb{P}(X \geqslant n+1) \\ &= \sum_{n=1}^{N} n \cdot \mathbb{P}(X \geqslant n) - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1) \cdot \mathbb{P}(X \geqslant n) \\ &= \boxed{\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X \geqslant n) \ - \ (N \cdot \mathbb{P}(X \geqslant N+1))}\end{aligned}$$

De plus, $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}N \cdot \mathbb{P}(X \geqslant N+1) &= N \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \\ &\boxed{\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k)}\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=N+1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$ est le reste d'ordre N de la série convergente $\sum k \cdot \mathbb{P}(X = k)$ (la convergence provenant du fait que X admette une espérance finie). Donc :

$$\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) \right) = 0$$

D'où, puisque $\forall N \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant (N \cdot \mathbb{P}(X \geqslant N+1))$ *:*

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} (N \cdot \mathbb{P}(X \geqslant N+1)) = 0}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} n \cdot \mathbb{P}(X = n) \right) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X \geqslant n) \ - \ (N \cdot \mathbb{P}(X \geqslant N+1)) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)
\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité souhaitée :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)}$$

□