Rédaction d'un exercice classique : Théorème de Leibniz avec domination sur tout segment

Clémentine Laurens

Exercice (Extrait d'un oral des Mines)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et bornée. Montrer que la fonction* $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*

Résolution. *Soit* $p \in \mathbb{N}$*. Montrons que* F *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*

Posons pour cela, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0, +\infty[$, $g(x,t) = f(t) \cdot e^{-tx}$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[$, $x \mapsto g(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *et* $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0,+\infty[$:

$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k \cdot f(t) \cdot e^{-tx}$$

De plus :

— *À* x *fixé dans* $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto g(x,t)$ *est* ***intégrable sur*** $[0,+\infty[$*. En effet,* $t \mapsto g(x,t)$ *est continue par morceaux donc localement intégrable sur* $[0,+\infty[$*, et par croissances comparées, étant donné que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}$*, on obtient que* $f(t) \cdot e^{-tx} = o(e^{-tx/2})$ *au voisinage de* $+\infty$ *(et* $t \mapsto e^{-tx/2}$ *est intégrable au voisinage de* $+\infty$*, car* $x \in \mathbb{R}_+^*$*).*

Et $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}$ *vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres :*

— *À* x *fixé dans* $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ *est* ***continue par morceaux sur*** $[0,+\infty[$.

— *À* t *fixé dans* $[0,+\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ *est* ***continue sur*** $\mathbb{R}_+^*$.

— *Hypothèse de domination locale :*

Soit M *un majorant de* $|f|$ *sur* $\mathbb{R}$*. Alors,* $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [a,+\infty[$, $\forall t \in [0,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq M \cdot t^k \cdot e^{-at}$$

et $\phi : t \mapsto M \cdot t^k \cdot e^{-at}$ *est* ***intégrable sur*** $[0,+\infty[$*. En effet,* ϕ *est continue par morceaux donc localement intégrable sur* $[0,+\infty[$*, et par croissances comparées, on obtient que :* $M \cdot t^k \cdot e^{-at} = o(e^{-at/2})$ *au voisinage de* $+\infty$ *(et* $t \mapsto e^{-at/2}$ *est intégrable au voisinage de* $+\infty$*, car* $a \in \mathbb{R}_+^*$*).*

Ainsi, d'après le ***théorème de Leibniz itéré,*** $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, F *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* $[a,+\infty[$*, et :*

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ \forall x \in [a,+\infty[,\quad F^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

F *est donc de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *tout entier, et* $\forall k \in [\![1,p]\!]$*, l'expression de* $F^{(k)}$ *donnée ci-dessus reste valable sur* $\mathbb{R}_+^*$*. En effet,* $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists a \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $x_0 \in [a,+\infty[$ *(*$a = \frac{x_0}{2}$ *convient, par exemple).*

Donc, d'après ce qui précède, F est p fois dérivable et de dérivée p-ième continue en x_0, et $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $F^{(k)}(x_0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x_0,t)\,\mathrm{d}t$.

Ceci étant valable $\forall p \in \mathbb{N}$, *on obtient bien que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur* $\mathbb{R}_+^*$. $\square$