Oraux de Mathématiques de l'ENS de Rennes (concours magistère)

Clémentine Laurens

Juin 2017

Chacun des exercices fait l'objet de 20 minutes de préparation suivies de 20 minutes de passage.

1 Enoncés des exercices

Exercice 1 (Analyse)**.** *Soit* $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

1. *Montrer que :* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn}$.

   Indication : On pourra développer en série entière $\frac{1}{1+t^b}$.

2. *Calculer :* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

Exercice 2 (Algèbre)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que l'ensemble des matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de trace nulle coincide avec l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Solutions détaillées des exercices

Résolution 1 (Exercice 1)**.**

1. *Commençons par démontrer que les deux quantités de l'énoncé sont bien définies.*

   - $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ *la série de terme général* $\frac{(-1)^n}{a+bn}$ *converge, d'après le critère spécial des séries alternées.*

   - $\forall (a,b) \in [1,+\infty[\, \times \mathbb{R}_+^*$, *la fonction* $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ *est continue sur le segment* $[0,1]$,*donc l'intégrale de Riemann* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ *est bien définie.*

   - $\forall (a,b) \in]0,1[\, \times \mathbb{R}_+^*$, *la fonction* $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ *est (positive et) continue, donc localement intégrable, sur l'intervalle* $]0,1]$. *De plus, au voisinage de* 0, *on a :* $\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = O(\frac{1}{t^{1-a}})$ *avec* $(1-a) \in]0,1[$. *Donc l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ *est bien définie.*

   Par ailleurs, notons que :

$$\int_{]0,1]} \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \int_{]0,1[} \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

Or, par développement en série entière :

$$\forall t \in]0,1[,\ \frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ t^{bn+a-1}.$$

Posons donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]0,1[$ *:*

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ t^{bk+a-1} = \frac{t^{a-1}\left(1-(-t^b)^{n+1}\right)}{1+t^b}$$

Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$*, et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]0,1[$ *:*

$$|f_n(t)| = \left|\frac{t^{a-1}\left(1-(-t^b)^{n+1}\right)}{1+t^b}\right| \leq \frac{2t^{a-1}}{1+t^b}$$

avec $t \mapsto \frac{2t^{a-1}}{1+t^b}$ *positive et intégrable sur* $]0,1[$ *(d'après ce qui précède). Donc, d'après le théorème de convergence dominée :*

$$\int_{]0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ t^{bn+a-1}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} (-1)^n\ t^{bn+a-1} \mathrm{d}t$$

i.e.

$$\int_{]0,1[} \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn}$$

ce qui permet de répondre à la question.

2. *Il s'agit ici d'appliquer la question précédente avec* $a = 1$ *et* $b = 3$ *:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\, \mathrm{d}t$$

Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{1+X^3}$.

-1 *étant racine évidente du polynôme* $\left(1+X^3\right)$*, on obtient facilement que :*

$$\left(1+X^3\right) = (X+1)(X^2-X+1)$$

On recherche alors les coefficients réels α, β *et* γ *tels que :*

$$\frac{1}{1+X^3} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X+\gamma}{X^2-X+1}$$

En multipliant des deux côtés de cette égalité par $(X+1)$ *et en évaluant l'expression obtenue en* -1*, on obtient que* $\alpha = \frac{1}{3}$.

En évaluant l'expression ci-dessus en 0*, on obtient alors que* $\gamma = \frac{2}{3}$.

Enfin, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{1}{1+X^3} = \frac{1}{X^3} + o\left(\frac{1}{X^3}\right)$$

$$\frac{\alpha}{1+X} = \frac{\alpha}{X} + o\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$\frac{\beta X+\gamma}{X^2-X+1} = \frac{\beta}{X} + \frac{\gamma}{X^2} + o\left(\frac{\beta}{X}\right)$$

On obtient donc, en injectant ces comportements asymptotiques dans l'expression ci-dessus, que $\alpha + \beta = 0$ *d'où* $\beta = \frac{-1}{3}$.

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\left(\frac{-1}{3}t + \frac{2}{3}\right)}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(|1+t|\right)\right]_0^1 = \ln(2)$$

et :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\left(\frac{-1}{3}t + \frac{2}{3}\right)}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\frac{-1}{6}(2t-1) + \frac{1}{2}}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{6}\int_0^1 \frac{(2t-1)}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(2t-1)}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t &= \left[\ln\left(\left|t^2-t+1\right|\right)\right]_0^1 \\ &= 0\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{2\,\pi\sqrt{3}}{9}$$

Par conséquent :

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

Résolution 2 (Exercice 2)**.**

Montrons cette égalité par double inclusion.

- *Tout d'abord, toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire strictement supérieure*[1]*, donc de trace nulle. La trace étant un invariant de similitude d'une part, et une forme linéaire d'autre part, on obtient bien que toute combinaison linéaire de matrices nilpotentes est de trace nulle.*

- *Démontrons à présent que toute matrice de trace nulle peut s'écrire comme une combinaison linéaire de matrices nilpotentes. Il suffit pour cela d'exhiber une base de l'ensemble des matrices de trace nulle composée de matrices elles-mêmes combinaisons linéaires de matrices nilpotentes.*

  Posons pour cela :
  - $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j}$ *la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient en position* (i,j)*, lequel vaut* 1.
  - $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, M_i *la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient en position* (n,n)*, lequel vaut* -1*, et du coefficient en position* (i,i)*, lequel vaut* 1*. Ainsi :* $\forall i \in [\![1,n-1]\!], M_i = E_{i,i} - E_{n,n}$.

  Considérons alors l'ensemble $\mathcal{B}$ *défini par :*

  $$\mathcal{B} = \left((E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, i\neq j} \cup (M_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}\right)$$

  $\mathcal{B}$ *est une base de l'ensemble des matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de trace nulle. En effet, on vérifie facilement que* $\mathcal{B}$ *est une famille libre de matrices de trace nulle, et* $\mathcal{B}$ *est de cardinal* n^2-1*. Or, la trace étant une forme linéaire non nulle sur l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, son noyau est un hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, donc de dimension* n^2-1*. Par cardinalité et liberté,* $\mathcal{B}$ *est donc bien une base de*

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice k : $N^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Alors, sachant que $Ker(N) \subset Ker(N^2) \subset \cdots \subset Ker(N^k) = \mathbb{R}^n$, il suffit de construire une base de $\mathbb{R}^n$ en complétant une base de $Ker(N)$ en une base de $Ker(N^2)$ en une base de $Ker(N^3)$ ... en une base de $Ker(N^k) = \mathbb{R}^n$, et d'exprimer la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à N dans cette base adaptée.

l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.

Or, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $E_{i,j}$ est nilpotente. Il suffit donc de montrer que $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, M_i peut s'écrire comme une combinaison linéaire de matrices nilpotentes.

Commençons, pour fixer les idées, par étudier le cas $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chacune des matrices de la décomposition ci-dessus est bien nilpotente.

Cette décomposition se généralise alors facilement dans le cas général ($n \in \mathbb{N}$) : soit $i \in [\![1,n-1]\!]$, alors :

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Formellement, ceci s'écrit :

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ M_i = (M_i + E_{n,i} - E_{i,n}) + E_{i,n} - E_{n,i}$$

avec $(M_i + E_{n,i} - E_{i,n})$ *nilpotente d'indice* 2*, et* $E_{i,n}$ *et* $E_{n,i}$ *nilpotentes.*

$\mathcal{B}$ *est donc bien une base de l'ensemble des matrices de trace nulle, constituée de matrices elles-mêmes combinaisons linéaires de matrices nilpotentes. Donc toute matrice de trace nulle peut s'écrire comme une combinaison linéaire de matrices nilpotentes.*

Par double inclusion, on a donc bien démontré que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de trace nulle est exactement égal à l'ensemble des combinaisons linéaires de matrices nilpotentes, i.e. exactement égal à l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des matrices nilpotentes de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*.*