Le problème de Berlekamp : résolution théorique, résolution pratique

Considérons un tableau d'ampoules, chacune étant soit éteinte, soit allumée. Munissons chaque ligne et chaque colonne d'un interrupteur permettant d'intervertir les états des ampoules sur cette ligne ou colonne. Quelle configuration initiale maximise le nombre minimal d'ampoules allumées qu'on peut obtenir en manipulant à l'infini et dans n'importe quel ordre les interrupteurs ? La résolution de ce problème d'optimisation dit « de Berlekamp » impose une approche transdisciplinaire : mathématique, avec les outils de la théorie des codes, puis informatique, pour pallier les limites d'une résolution théorique algorithmiquement trop lente dans les cas concrets. C'est cette transdisciplinarité, permettant l'exploitation d'outils variés, qui m'a séduite.

Positionnement thématique

MATHEMATIQUES (Algèbre), INFORMATIQUE (Informatique pratique), MATHEMATIQUES (Mathématiques Appliquées).

Mots-clés

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés** (en anglais)
Problème de Berlekamp	*Berlekamp's Switching Game*
Modélisation mathématique	*Mathematical modelling*
Optimisation	*Optimization*
Théorie des codes	*Coding theory*
Recuit simulé	*Simulated annealing*

Bibliographie commentée

En Mathématiques, l'optimisation est le domaine qui s'attache à la résolution de problèmes visant à maximiser ou minimiser une fonction sur un certain ensemble. Cette branche très riche se décline au travers de nombreux exemples relevant aussi bien des Mathématiques que de la Physique, la Chimie ou encore l'Industrie. Le « *problème de Berlekamp* » présenté en introduction (aussi connu sous l'appellation anglo-saxonne de « *Berlekamp's Switching Game* ») [1] est l'un d'entre eux.

S'intéresser à un tel problème suppose en premier lieu un travail de modélisation, afin de définir les objets mathématiques adaptés à l'étude que l'on souhaite mener. Ce travail peut parfois aboutir à la mise en relation de domaines ayant, *a priori*, peu de points de convergence. Ainsi, dans le cas du « *Berlekamp's Switching Game* », les objets les plus adaptés pour modéliser le problème se trouvent être ceux de la théorie des codes [2], et plus précisément les codes linéaires [2] [3]. On établit donc un lien entre un problème de recherche de configuration optimale pour un tableau d'ampoules et une théorie mathématique développée afin de relever les enjeux de la transmission d'information.

L'intérêt de ce premier travail est de ramener le problème considéré à une étude que l'on peut mener avec des outils aux propriétés connues, afin de le résoudre d'un point de vue théorique.

Toutefois, il n'est pas rare que cette résolution théorique fournisse des résultats certes mathématiquement satisfaisants (preuve de l'existence et de l'éventuelle unicité d'une solution, mise au jour d'un algorithme de résolution du problème...), mais insuffisants, en pratique, pour la recherche de solutions. Cet obstacle réside le plus souvent dans une trop grande complexité des algorithmes théoriques de recherche des solutions qui, s'ils peuvent être implémentés, présentent des temps de calcul trop élevés et/ou des besoins en mémoire trop importants. Ce sera effectivement le cas du « *problème de Berlekamp* ».

Ces difficultés à exploiter les résultats théoriques pour la recherche effective de solutions poussent bien souvent à la recherche d'un compromis algorithmique, alliant une fiabilité convenable, un temps de calcul correct et des besoins en mémoire raisonnables. Pour les problèmes d'optimisation, une technique très utilisée est celle du « recuit simulé » [4] [5]. Cette méthode algorithmique inspirée de la physique statistique fournit en effet d'excellents résultats pour de très nombreux problèmes d'optimisation (constatation expérimentale), et possède le très grand avantage de converger théoriquement vers une solution optimale (convergence théorique démontrable). Il s'agira donc de proposer une seconde modélisation de notre problème, cette fois-ci informatique, afin de lui appliquer une version adaptée de l'algorithme du « recuit simulé », implémentée dans un langage approprié.

Problématique retenue

Pour résoudre un problème d'optimisation comme le « *Berlekamp's Switching Game* », il est donc nécessaire de proposer une modélisation mathématique judicieuse, d'exploiter les propriétés que celle-ci met à notre disposition, et, au besoin, de trouver un compromis algorithmique permettant la recherche effective de solutions dans des cas concrets.

Objectifs du TIPE

Je proposerai tout d'abord une modélisation mathématique du « *Berlekamp's Switching Game* ». Plus précisément, je montrerai que ce problème d'optimisation est équivalent à un problème de théorie des codes.

Je m'attacherai alors à résoudre théoriquement le problème en question. J'utiliserai pour cela quelques outils généraux de théorie des codes, dont j'adapterai l'usage au cas particulier qui me préoccupe.

Je montrerai ensuite les difficultés pratiques que pose une telle résolution (complexité temporelle de l'algorithme théorique), et mettrai ainsi en évidence la nécessité d'une résolution faisant appel à un algorithme plus efficace (méthode du recuit simulé), que j'implémenterai en Python.

Références bibliographiques

[1] J. Le Roux : « Le Berlekamp's Switching Game » : *http://culturemath.ens.fr/maths/pdf/jeux/berlgame.pdf . Article lisible en ligne, dont j'ai principalement exploité les deux premières parties (pages 1 à 8).*

[2] J.-G. Dumas, J.-L. Roch, E. Tannier et S. Varrette : Théorie des codes (Compression, cryptage, correction) : *Introduction et chapitre 4 (« Détection et correction d'erreurs »), éd. Dunod, 2013 (2ème édition). Un site dédié à l'ouvrage : http://theoriedescodes.forge.imag.fr/toc.html .*

[3] Wikipédia : Code linéaire : *https://fr.wikipedia.org/wiki/Code_lin%C3%A9aire . Page consultée régulièrement de Septembre 2016 à Décembre 2016.*

[4] Wikipédia : Recuit simulé : *https://fr.wikipedia.org/wiki/Recuit_simul%C3%A9 . Page consultée régulièrement de Septembre 2016 à Février 2016.*

[5] J.-L. Lutton, E. Bonomi : « Le recuit simulé » : *Pour la science, n° 129, Juillet 1988, pages 68 à 77.*

[6] Adrien Fontaine : « Exemples et applications des notions de sous-groupes distingués et de groupe quotient » : *Décembre 2013. Cours de l'ENS de Rennes, accessible en ligne à l'adresse : http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~afontain/103%20sous-groupes%20distingues%20et%20groupes%20quotients.pdf .*