Itération de polynômes et ensembles de Julia

Magali Jay Clémentine Laurens

Département de Mathématiques
École Normale Supérieure de Rennes

Lundi 16 avril 2018

Sommaire

Cadre de l'étude, définitions et notations générales

Ensembles de Julia et de Fatou

Dynamique locale

Propriétés générales

Caractère fractal des ensembles de Julia

Définitions et notations générales

Cadre

$R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ polynôme de degré ≥ 2

Définitions et notations générales

Cadre

$R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ polynôme de degré ≥ 2

Itérées

Orbite de z_0 sous l'action de R, $O^+(z_0)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = R(z_n) = R^{n+1}(z_0)$$

Définitions et notations générales

Famille normale

$\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ famille de fonctions méromorphes de $U \to \overline{\mathbb{C}}$
Famille normale si de toute suite à valeurs dans $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de U.

Définitions et notations générales

Famille normale

$\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ famille de fonctions méromorphes de $U \to \overline{\mathbb{C}}$
Famille normale si de toute suite à valeurs dans $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de U.

Famille équicontinue

$\mathcal{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ famille de fonctions de $X \to X$ Famille équicontinue si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2,\ d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow (\forall i \in I, d(f_i(x_1), f_i(x_2)) < \epsilon)$$

Définitions et notations générales

Théorème d'Arzela

Normale $\Leftrightarrow$ Equicontinue sur tout compact

Ensembles de Julia et de Fatou

Définitions

$z \in F(R)$ s'il existe un voisinage U de z tel que $\mathcal{F} = \{R^n|_U|\ n \in \mathbb{N}^*\}$ soit une famille normale.
Sinon, $z \in J(R)$

Ensembles de Julia et de Fatou

Définitions

$z \in F(R)$ s'il existe un voisinage U de z tel que
$\mathcal{F} = \{R^n|_U| \ n \in \mathbb{N}^*\}$ soit une famille normale.
Sinon, $z \in J(R)$

Premières propriétés

(i) L'ensemble de Fatou est ouvert.

(ii) L'ensemble de Fatou $F(R)$ est complètement invariant :

$$\forall z \in F(R),\ R(z) \in F(R) \text{ et } R^{-1}(\{z\}) \subset F(R)$$

(iii) L'ensemble de Julia est fermé.

(iv) L'ensemble de Julia $J(R)$ est complètement invariant.

Ensembles de Julia et de Fatou

Propriété

$J(R) \neq \emptyset$

Ensembles de Julia et de Fatou

Propriété

$J(R) \neq \emptyset$

Exemple

$z \mapsto z^2$

Ensembles de Julia et de Fatou

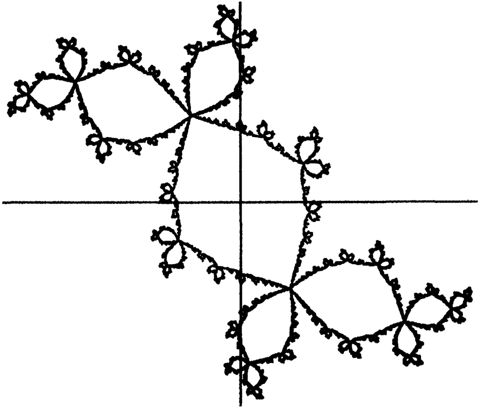

Figure – Lapin de Douady

Ensembles de Julia et de Fatou

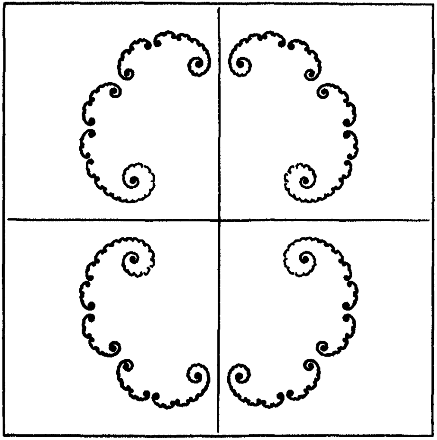

Figure – $z \mapsto z^2 + 3$

Ensemble de Julia

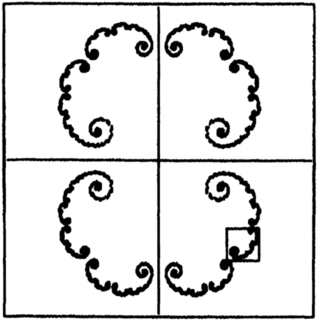
FIGURE a

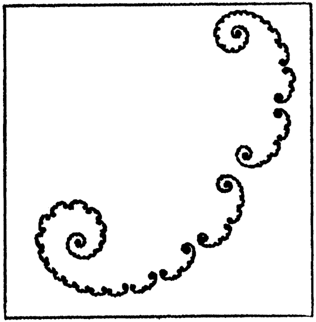
FIGURE b

Figure – $z \mapsto z^2 + 3$

Dynamique locale

Valeur propre

$\lambda_{z_0} = (R^n)'(z_0).$

Dynamique locale

Valeur propre

$\lambda_{z_0} = (R^n)'(z_0)$.

Orbites

(i) Attractive si $0 < |\lambda_{z_0}| < 1$.

(ii) Super-attractive si $\lambda_{z_0} = 0$.

(iii) Répulsive si $|\lambda_{z_0}| > 1$.

(iv) Neutre si $|\lambda_{z_0}| = 1$.

Dynamique locale

Condition suffisante

(i) Si l'orbite $O^+(z_0)$ est attractive ou super-attractive, alors elle est incluse dans $F(R)$.

(ii) Si l'orbite $O^+(z_0)$ est répulsive, alors elle est incluse dans $J(R)$.

Dynamique locale

Dynamique des orbites attractives

Il existe un voisinage U de z_0, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et un unique homéomorphisme $\Phi\colon U \to D_r$ tel que $\Phi(z_0) = 0$, $\Phi'(z_0) = 1$, et le digramme suivant commute :

Propriétés générales

- Les ensembles de Julia sont compacts.

Propriétés générales

- Les ensembles de Julia sont compacts.
- Les ensembles de Julia sont généralement d'intérieur vide : si $Int(J) \neq \emptyset$, alors $J(R) = \overline{\mathbb{C}}$.

Propriétés générales

- Les ensembles de Julia sont compacts.
- Les ensembles de Julia sont généralement d'intérieur vide : si $Int(J) \neq \emptyset$, alors $J(R) = \overline{\mathbb{C}}$.
- Les ensembles de Julia sont des ensembles parfaits (i.e. fermés et sans points isolés).

Propriétés générales

- Les ensembles de Julia sont compacts.
- Les ensembles de Julia sont généralement d'intérieur vide : si $Int(J) \neq \emptyset$, alors $J(R) = \overline{\mathbb{C}}$.
- Les ensembles de Julia sont des ensembles parfaits (i.e. fermés et sans points isolés).
- L'ensemble de Julia $J(R)$ est l'adhérence des points périodiques répulsifs pour R.

Propriétés générales

Résultat préliminaire essentiel

Supposons qu'il existe trois points distincts $(a, b, c) \in \overline{\mathbb{C}}^3$ tels que :

$$\left(\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(U) \right) \cap \{a, b, c\} = \emptyset$$

Alors $\mathcal{F}$ est une famille normale sur U.

L'ensemble de Julia est compact

- Fermé : découle de la définition

L'ensemble de Julia est compact

- Fermé : découle de la définition
- Borné : $\infty \in F(R)$

L'ensemble de Julia est compact

- Fermé : découle de la définition
- Borné : $\infty \in F(R)$
- Dimension finie

L'ensemble de Julia est généralement d'intérieur vide

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n(U) = \left(\overline{\mathbb{C}} \setminus E_U\right) \subset J(R)$ (invariance complète de $J(R)$)

L'ensemble de Julia est généralement d'intérieur vide

- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n(U) = \left(\overline{\mathbb{C}} \setminus E_U\right) \subset J(R)$ (invariance complète de $J(R)$)
- E_U contient au plus 2 points (résultat préliminaire) donc $\overline{\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus E_U\right)} = \overline{\mathbb{C}}$ donc $\overline{\mathbb{C}} \subset J(R)$

L'ensemble de Julia est généralement d'intérieur vide

- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n(U) = \left(\overline{\mathbb{C}} \setminus E_U\right) \subset J(R)$ (invariance complète de $J(R)$)
- E_U contient au plus 2 points (résultat préliminaire) donc $\overline{\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus E_U\right)} = \overline{\mathbb{C}}$ donc $\overline{\mathbb{C}} \subset J(R)$
- $J(R)$ est fermé

Adhérence des points périodiques

Inclusion

L'ensemble de Julia $J(R)$ est inclus dans l'adhérence de tous les points périodiques de R.

Adhérence des points périodiques

Inclusion

L'ensemble de Julia $J(R)$ est inclus dans l'adhérence de tous les points périodiques de R.

Lemme

Il y a un nombre fini d'orbites (super-)attractives et d'orbites neutres.

Adhérence des points périodiques

Inclusion

L'ensemble de Julia $J(R)$ est inclus dans l'adhérence de tous les points périodiques de R.

Lemme

Il y a un nombre fini d'orbites (super-)attractives et d'orbites neutres.

Egalité

L'ensemble de Julia $J(R)$ est l'adhérence des points périodiques répulsifs de R.

Caractère fractal

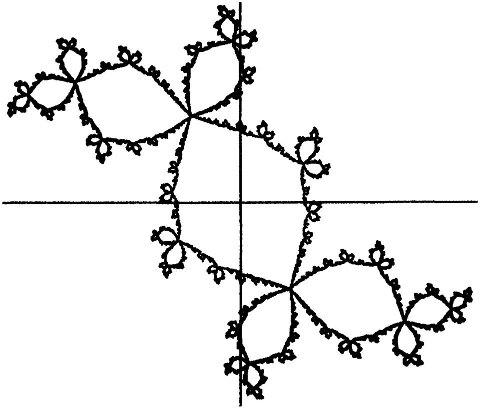

Figure – Lapin de Douady : ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 + c$ avec $c \in \mathbb{C}$ tel que $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 1$ et $\Im(c) > 0$

Caractère fractal des ensembles de Julia

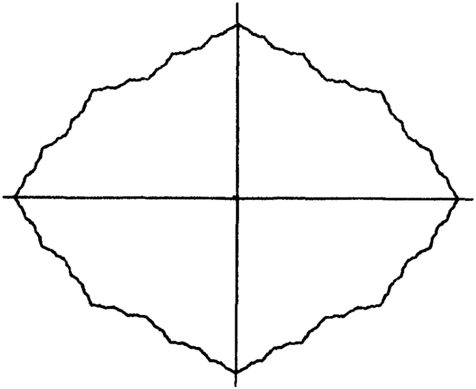

Figure – Ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 - 0.3125$

Merci !