Histoire et enjeux de la recherche en Probabilités au Japon au début du XXe siecle

Kameda Toyojiro, un personnage emblématique

Rapport de stage

Clémentine Laurens

encadrée par

Laurent Mazliak

Mai - Juin 2019

Remerciements

Je remercie très sincèrement mon maître de stage Laurent Mazliak pour son investissement, son accompagnement extrêmement précieux, sa disponibilité et sa pédagogie pendant ces deux mois de stage.

J'adresse également mes remerciements à Sébastien Erhel, de la Bibliothèque Universitaire Beaulieu (Université de Rennes 1), pour son aide à dénicher plusieurs articles nécessaires à mes recherches. De même, je remercie la section "Références" de la Bibliothèque Générale de l'Université de Tokyo, qui a répondu à mes sollicitations et m'a fourni de précieuses informations sur Kameda Toyojiro, ainsi que Johann Pörnbacher, responsable des archives de l'Académie des Sciences de la Bavière, qui a également répondu à mes demandes avec beaucoup de patience et de gentillesse.

Enfin, je remercie mes collègues de l'ENS de Rennes et du Lycée Louis le Grand qui m'ont aiguillée dans mes recherches lorsqu'elles stagnaient et ont su me secourir lorsque l'Allemand et le Japonais avaient raison de mes compétences linguistiques.

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce travail est de présenter quelques uns des enjeux majeurs de la recherche en Probabilités au Japon au début du XX^{e} siècle. Pour ce faire, on se concentre sur un mathématicien méconnu, mais au parcours pourtant emblématique : Kameda Toyojiro.

On commence par positionner son travail sur les plans historique et politique. On met ainsi en évidence l'héritage culturel de ce personnage, qui permettra ensuite d'éclairer son parcours scientifique proprement dit.

Dans un second temps, on positionne l'oeuvre de Kameda sur un plan purement scientifique, en la replaçant de le contexte mathématique du début du XX^{e} siècle. On se concentre plus précisément sur un article de l'auteur qui cristallise la majorité des enjeux de son œuvre, et qui plus largement permet de comprendre un certain nombre d'enjeux relatifs au développement de la recherche en Probabilités au Japon sur la période 1910-1930.

L'ensemble de ces éléments permettra de positionner Kameda Toyojiro non seulement comme un « passeur de savoirs », mais également comme l'acteur d'un renouveau probabiliste au Japon et dans le monde.

Dans ce rapport, les noms japonais sont donnés dans une transcription phonétique dans l'alphabet latin, en suivant la norme japonaise (nom en premier, prénom en deuxième [1]). Seule la bibliographie fait exception à cette dernière règle : pour une question de norme de mise en forme, les prénoms des auteurs japonais y sont exceptionnellement donnés avant leurs noms.

1. Ainsi, lorsque l'on parle de Kameda Toyojiro, Kameda est un nom de famille et Toyojiro un prénom.

1 Positionnement historique et politique
Kameda Toyojiro, scientifique japonais du début du XX^e^ siècle

Ce premier chapitre positionne Kameda Toyojiro comme l'archétype du scientifique japonais du début du XXe siècle. Kameda est en effet un personnage emblématique des transformations profondes qui ont forgé le Japon scientifique moderne. Héritier des changements radicaux survenus à la fin du XIXe siècle dans les systèmes politique et d'enseignement, il affiche un parcours scientifique laissant transparaitre les enjeux de la recherche mathématique moderne dans le Japon du début du XXe siècle. [1]

A Le Japon scientifique en formation

L'ère Meiji couvre la période 1868-1912 au Japon, et marque un tournant fondamental dans la politique extérieure nipponne. Elle voit en effet la fin de la politique d'isolement volontaire du Japon, et le début de l'ouverture vers le monde extérieur, tant pour des questions économiques et politiques que culturelles ou scientifiques.

Au niveau scientifique, le Japon opère à cette période une profonde restructuration de ses systèmes éducatif et de recherche, notamment dans le domaine des mathématiques. On observe un glissement extrêmement rapide des mathématiques traditionnelles japonaises, appelées *Wasan*, vers les mathématiques occidentales. Cette transformation est si rapide et profonde qu'elle sera qualifiée en 1876 de « révolution » par Erwin Bah (1849-1913), un médecin allemand qui enseigna à l'Université de Médecine de Tokyo pendant plus de 25 ans.

Les mathématiques traditionnelles japonaises dominent le paysage scientifique du Japon jusqu'au milieu des années 1880. Initialement inspirées des mathématiques chinoises puis développées en autarcie quasi-totale au Japon, les mathématiques *wasan* diffèrent des mathématiques occidentales tant sur le fond de la démarche que sur la forme. Les mathématiciens *wasan* considèrent en effet que le cheminement dans la recherche est une fin en soi, et importe autant que l'obtention de

1. **N.B.** Une bibliographie complète référençant l'ensemble des ouvrages que j'ai étudiés pour ce travail de recherche est présentée à la fin de ce rapport. Toutefois, je tiens à souligner que les informations présentées dans les deux premières parties de ce chapitre sont très majoritairement issues des travaux de Sasaki Chikara [Sas94] et David Eugene Smith et Yoshio Mikami [SY14], ainsi que de l'article "Japanische Studenten an der Berliner Universität, 1870-1914" [jap97]. J'adresse aux auteurs de ces documents tous mes remerciements, et leur reconnais la paternité des recherches ayant conduit à la compilation de ces informations historiques.

résultats scientifiques concrets. Leur démarche touche à la notion de mathématiques « pures » - un concept alors inexistant en Occident - et peut être comparée la démarche artistique de « l'art pour l'art ». Les concepts mathématiques sont d'ailleurs davantage considérés comme des objets artistiques que scientifiques. Sasaki Chikara [Sas94] identifie 6 points de divergences majeures entre les mathématiques traditionnelles japonaises et les mathématiques occidentales :

1. Absence d'axiomatique et de preuve synthétique.
2. Absence de relation avec les autres domaines scientifiques, à l'exception du calcul des calendriers.
3. Absence du concept de fonction.
4. Absence d'un système de coordonnées.
5. Absence de réforme du système d'écriture.
6. Quasi-absence du concept d'angle.

C'est à partir du début des années 1850 que les mathématiques occidentales commencent à faire leur apparition dans le paysage scientifique japonais, principalement pour servir des fins militaires et topographiques. Il faut noter qu'à cette période, les sentiments xénophobes sont très prononcés au Japon. En particulier, les *wasan* considèrent leurs connaissances mathématiques comme supérieures aux connaissances occidentales, lesquelles ne revêtent à leur yeux d'intérêt que dans leur application à d'autres domaines techniques. C'est donc par ce biais d'autres domaines techniques que les japonais commencent à accéder aux connaissances scientifiques occidentales, et qu'ils prennent progressivement conscience de l'étendue desdites connaissances. Une date importante dans le développement de l'enseignement des mathématiques occidentales au Japon est 1863, date de la création de la « Kaiseijo School ». Cette école avait pour vocation d'enseigner toutes les connaissances relatives aux arts et aux sciences. C'est là qu'un enseignant nommé Kanda Kohei fera les premiers pas vers l'enseignement des mathématiques européennes au Japon.

Avec l'abolition du shogunat et la restauration de l'Empire du Japon en 1868, le pays ouvre ses frontières et commence à envoyer aux frais de l'Etat des étudiants se former dans les grandes universités occidentales. Des fonctionnaires et hommes d'état japonais partent en voyage d'observation en Europe et aux Etats Unis pour en rapporter des idées et pistes pour transformer le modèle nippon, et le Japon invite sur son territoire des « consultants » étrangers pour conseiller les acteurs des réformes institutionnelles en cours. Le Japon cherche alors à se hisser au rang de grande puissance internationale, non seulement sur les plans économique et militaire, mais également sur le plan culturel. C'est ainsi que débute une vaste réforme du système d'enseignement au Japon, qui aboutira en 1872 avec la promulgation d'un nouveau Code de l'Education, fortement influencé par le modèle occidental.

Deux évènements fondamentaux dans le développement du japon scientifique moderne sont les créations, en 1877, de l'Université de Tokyo et de la Société Mathématique de Tokyo. C'est par le biais de ces deux institutions que les mathématiques occidentales vont progressivement s'imposer dans les milieux de l'enseignement et de la recherche au Japon, au détriment des mathématiques *wasan*. C'est ainsi que les connaissances occidentales vont progressivement se diffuser au Japon, et que les mathématiciens japonais vont rattraper le retard sur leurs homologues occidentaux accumulé pendant près d'un siècle d'isolationnisme total avant la restauration de l'Empire.

L'Université de Tokyo est la première université d'état du Japon. Sa création en 1877 s'inscrit dans la dynamique impulsée par le nouveau Code de l'Education de 1872, dans lequel il est stipulé : « À l'avenir, il ne devra plus y avoir aucune famille illettrée au sein d'aucune communauté, ni aucun individu illettré au sein d'aucune famille ». L'influence occidentale est fondamentale dans l'enseignement qui y est délivré, en particulier pendant les premières années d'existence de l'Université. La plupart des cours y sont dispensés en Anglais ou en Français, et une large majorité de la première génération d'enseignants qui y officient sont étrangers.

En 1886 est engagée une réforme du système universitaire japonais. L'Université de Tokyo devient alors l'« Université Imperiale de Tokyo ». L'esprit de cette réforme est que l'enseignement doit se mettre au service de l'état : c'est parce que les connaissances scientifiques sont d'utilité nationale qu'il est important de les diffuser et de former des érudits et des chercheurs japonais, qui pourront mettre leur savoir et leurs compétences au service de la nation.

La Société Mathématique de Tokyo, elle, est une société privée qui a pour but de permettre aux mathématiciens japonais de haut niveau de se rencontrer et d'échanger. A sa création en 1877, elle est co-dirigée par deux présidents, l'un issu de la tradition mathématique *wasan*, Yanagi Narayoshi, l'autre ayant étudié les mathématiques occidentales, Kanda Takahira. Cette double présidence assure temporairement une continuité dans la tradition de la recherche mathématique avant et après la restauration de l'Empire. Les mathématiciens qui font partie de la Société Mathématique de Tokyo pendant ses premières années d'existence sont à 70% issus de la tradition *wasan* : en 1877, les mathématiciens de haut niveau au Japon sont encore ceux ayant étudiés les mathématiques traditionnelles japonaises, et les spécialistes des mathématiques occidentales sont davantage des enseignants que des chercheurs à proprement parler. Il faut attendre 1884 pour que la Société Mathématique de Tokyo soit renommée en « Société de Mathématiques et Physique de Tokyo », et que les mathématiciens pro-mathématiques occidentales prennent la place des *wasan*. Ces derniers ne représentent alors plus que 20% des mathématiciens de la Société. Notons que le changement de nom de cette Société est symptomatique de l'implantation de la tradition occidentale dans le monde mathématique japonais : il traduit l'acceptation d'une démarche de trans-disciplinarité typique des mathématiques occidentales, qui était étrangère aux mathématiciens *wasan*. C'est également à partir de ce moment que les mathématiciens japonais commencent à démontrer des résultats originaux d'envergure, et que la Société de Mathématiques et Physique de Tokyo peut être considérée comme une institution de recherche comparable à celles que l'on peut trouver au XIX^{e} siècle en Europe.

B L'influence allemande

L'influence du modèle allemand est essentielle dans les transformation de l'ère Meiji, tant sur des questions relatives à l'enseignement que sur des questions de politique et de société.

La relation étroite entre le Japon et l'Allemagne transparaît dans le nombre très élevé d'étudiants japonais partis étudier en Allemagne après la restauration de l'Empire en 1868. Entre 1870 et 1914, ce sont en effet 678 étudiants japonais qui sont inscrits sur les registres allemands, ce qui fait du Japon le plus grand pourvoyeur d'étudiants étrangers pour l'Allemagne à cette période. Un très grand nombre d'entre eux occupent des postes clés à leur retour au Japon. Certains officient dans les domaines des sciences, de l'économie, de la culture ou encore en politique, et plus d'un tiers deviennent professeurs (plus de 250 parmi les 678). Le Japon de l'ère Meiji va donc être forgé par des individus ayant étudié en Allemagne, et la jeunesse japonaise d'alors formée par des professeurs empreints de la culture académique et scolaire germanique.

L'influence allemande s'affirme avec le coup d'état de 1881, pendant lequel Ito Hirobumi prend le contrôle politique du Japon en écartant Okuma Shigenobu du pouvoir. Ce dernier était fortement influencé par les courants de pensée français et britannique promouvant notamment les droits et libertés individuelles. A l'inverse, Ito Hirobumi promeut un système politique centré autour de la figure de l'Empereur, sur le modèle prussien. Cette vision aboutira en 1889 à la rédaction d'une nouvelle constitution, d'inspiration allemande.

A la demande de l'idéologue Inoue Kowashi, proche conseiller d'Ito Hirobumi, on demande dès 1881 aux étudiants du département de Mathématiques, Physique et Astronomie de l'Université de Tokyo d'apprendre l'Allemand - plutôt que le Français, qui était jusqu'alors préconisé.

Le modèle universitaire et social allemand fait figure de référence dans la réforme du système universitaire menée en 1886, qui aboutit entre autres à la transformation de l'« Université de Tokyo » en « Université Impériale de Tokyo ». A partir de cette date, l'influence allemande va considérablement s'affirmer dans le monde mathématique, et une culture mathématique germanophile et germanophone va s'implanter au Japon.

Le département de Mathématiques de l'Université de Tokyo est dirigé jusqu'en 1886 par Kikuchi Dairoku, qui a fait ses études à l'Université de Cambridge en Angleterre. Sa vision des mathématiques est donc profondément marquée par l'influence britannique. Mais en 1887 apparaît un personnage essentiel, qui sera à l'origine d'importants changements dans le département de Mathématiques de l'Université : Fujisawa Rikitaro. Cet ancien élève de Kikuchi Dairoku, parti étudier en Allemagne à l'Université de Berlin, où il a notamment suivi les enseignements de Leopold Kronecker et Karl Weierstrass, revient au Japon après avoir obtenu sa thèse de doctorat sur les séries de Fourier. A son retour, il est titularisé professeur à l'Université de Tokyo en 1887, et continue à y enseigner jusqu'en 1921. Il sera à l'initiative d'une réforme du cursus scolaire proposé dans le département de Mathématiques, où il importera notamment l'enseignement de la théorie des fonction et de la théorie des fonctions elliptiques. C'est le début d'une tradition d'enseignement et - plus tard - de recherche mathématique au Japon fortement marquée par l'influence allemande, qui perdurera jusqu'au début de la Première Guerre Mondiale. A compter du début du conflit de 1914-1918, les relations scientifiques entre le Japon et l'Allemagne, pays adversaires, sont presque totalement interrompues.

C Kameda Toyojiro : éléments biographiques

Kameda Tojojiro, deuxième fils de Kameda Yatsube, naît à Tokyo en Janvier 1885. Il étudie à l'Université Impériale de Tokyo et y obtient une licence de mathématiques, puis il y soutien avec succès, le 23 décembre 1918, une thèse de doctorat, rédigée en japonais et portant notamment sur la théorie des fonctions caractéristiques [2].

Il est l'un des héritiers directs des transformations du modèle d'enseignement japonais pendant l'ère Meiji. Son passage à l'Université Impériale de Tokyo s'effectue au moment où Fujisawa Rikitaro dirige le département de Mathématiques. Entre 1913 et 1914, Kameda part étudier pendant un an en Allemagne à l'Université de Berlin. Autrement dit, il est baigné dans la culture mathématique allemande tout au long de sa formation.

Avant l'obtention de son doctorat, il enseigne pendant une courte période à l'Université Impériale de Tokyo, et travaille également comme ingénieur. En tant qu'actuaire [3] et spécialiste des statistiques, il travaille de plus pour le département d'assurance au ministère de la Santé et des Affaires sociales. Il est notamment membre de la Société Japonaise d'Actuaire, en charge de la direction des affaires d'assurance de la vie au Japon. Pendant cette période, il effectue au moins un voyage aux Etats-Unis.

Au niveau mathématique, il publie essentiellement en Allemand entre 1914 et 1917, puis en Anglais de 1919 à 1933. Le choix de ces langues est édifiant : Kameda a reçu une formation mathématique fortement marquée par l'influence allemande, et une large partie des sources sur lesquelles il s'appuie est germanophone. Il n'est donc pas surprenant que la langue de publication qu'il préfère au début de sa carrière soit l'Allemand. Mais à l'issue de la Première Guerre Mondiale en 1918, le Japon fait partie des vainqueurs, aux côtés de pays anglophones. L'Allemagne, elle, est vaincue. Dans le monde scientifique, les travaux d'auteurs allemands et les publications germanophones seront globalement ignorés par les scientifiques issus des pays vainqueurs, et ce pendant une dizaine d'années après l'issue de la guerre. Le passage de Kameda de l'Allemand à l'Anglais à cette période peut donc être interprété comme une démarche politique : il s'agit de marquer son appartenance au camp des vainqueurs, et de conserver une visibilité internationale pour ses articles. Notons que cette question de visibilité internationale transparait déjà dans le choix de ne pas rédiger ses articles en japonais : quand Kameda commence à publier, il est déjà bien acquis que la tradition de recherche mathématique japonaise ne peut se développer qu'en s'appuyant sur les connaissances et compétences étrangères - en particulier occidentales - et que le Japon ne peut s'imposer comme puissance scientifique qu'en s'ouvrant à l'international. Il est donc nécessaire non seulement de lire et d'étudier les travaux d'auteurs étrangers, mais également de pouvoir échanger avec eux et de faire connaitre les travaux japonais : cela passe nécessairement par des publications rédigées dans des langues accessibles aux occidentaux.

2. Remarque de vocabulaire : Kameda parle en fait dans ses articles de « fonctions génératrices » (terme introduit par Laplace) pour désigner ce que nous appelons aujourd'hui couramment « fonctions caractéristiques »(terme introduit pour la première fois par Poincarré en 1912).

3. « Un actuaire est un professionnel chargé d'appliquer aux questions de prévoyance sociale, d'assurances, d'amortissement et de finances en général, les théories mathématiques concernant le calcul des probabilités et la statistique. » (`https://www.cnrtl.fr/definition/actuaire`)

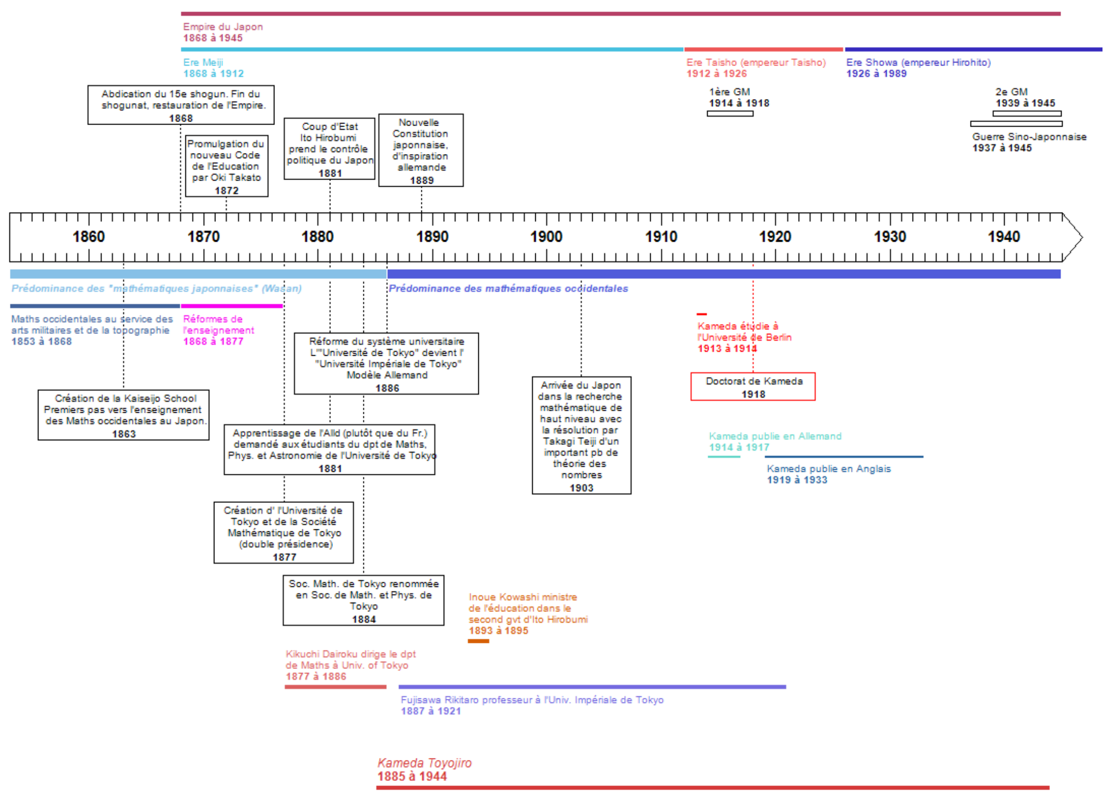

Figure 1.1 – Mise en perspective historique et politique de la vie de Kameda Toyojiro

Les publications de Kameda traitent des questions d'analyse (équations et calcul intégral, équations différentielles, calcul aux différences finies, séries de Fourier) et de probabilités (« problème de Poisson », fonctions caractéristiques). Ses publications sont rédigées avec un très grand soin : la qualité de la langue utilisée est toujours excellente (rappelons qu'il a voyagé en Allemagne et aux Etats-Unis, et maitrise parfaitement l'Allemand et l'Anglais), les raisonnements mathématiques sont rigoureusement détaillés et commentés, les sources systématiquement référencées. Les sources qu'il cite sont principalement des travaux occidentaux, parmi lesquels certains livres relativement anciens faisant office d'ouvrages de référence, mais également des publications récentes, qui présentent et exploitent des outils mathématiques modernes. Ses sources sont pour la plupart germanophones et anglophones.

Kameda Toyojiro meurt en 1944, à l'âge de 59 ans.

2 Positionnement scientifique
Inscription du travail de Kameda dans le développement des Probabilités

Ce second chapitre a pour but de positionner l'œuvre de Kameda Toyojiro dans un contexte mathématique global. Il cherche également à mettre en évidence la démarche probabiliste de Kameda, qui s'attache à résoudre des problèmes classiques de probabilités en utilisant des outils moderne d'analyse pure. On montrera que ses publications sont révélatrices de certains des enjeux les plus importants de la recherche en probabilités au Japon au début du XX^{e} siècle.

A Panorama sélectif des Probabilités dans le monde germanophone du XX^{e} siècle

Dans le monde germanophone, au début du XX^{e} siècle, l'ouvrage de référence sur les probabilités est le livre de l'auteur autrichien Emanuel Czuber (1851-1925) *Wahrscheinlichkeits Rechnung* [Czu08] [1], paru en 1908. Il s'agit en fait d'une traduction en Allemand de l'ouvrage du français Antoine Meyer (1801-1857) *Calcul des Probabilités* [Mey74], publié à titre posthume en 1874. Dans la préface de ce texte essentiellement didactique F. Folia affirme :

> « Cet ouvrage de Meyer est un résumé très complet des plus importants travaux de Bernoulli, Moire, Laplace, Poisson, Gauss, Enke, Bienaymé etc. sur le calcul des probabilités ; et l'on peut hardiment affirmer, pensons-nous, qu'il n'existe aucun traité aussi vaste sur la matière, si l'on excepte la *Théorie analytique des probabilités* ».

Ce dernier ouvrage [Lap14] est un texte majeur du mathématicien français Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), dont la seconde édition est parue en 1814. Meyer reprend exactement, dans son *Calcul des Probabilités*, une large part des principes de calcul énoncés par Laplace.

Pour comprendre la culture probabiliste germanophone du début du XX^{e} siècle, ce sont les oeuvres de ces trois auteurs, Czuber, Meyer et Laplace, qu'il faut étudier : c'est sur leur héritage scientifique que se construit la recherche en probabilité en Europe germanophone au début des années

1. Littéralement : « Calcul des Probabilités ».

1900. C'est donc à la lumière des textes de ces trois scientifiques qu'on présente ci-dessous quelques éléments qui nous permettrons par la suite de positionner le travail de Kameda sur le plan scientifique. On commence par ébaucher l'histoire de quelques concepts et outils probabilistes importants, avant de s'intéresser à quelques-unes des questions qui ont animé les esprits des mathématiciens des XIX^{e} et XX^{e} siècles.

A.1 Focus sur quelques outils probabilistes

Les notions de variable aléatoire et de densité de probabilité sont introduites en 1837 par le français Siméon Denis Poisson (1781-1840) dans son ouvrage *Recherche sur la probabilité des jugements*.

La notion de fonction caractéristique, elle, a été introduite par Laplace avant même la publication de la *Théorie analytique des probabilités* [2]. Toutefois, cet outil est largement délaissé par les mathématiciens pendant près d'un siècle après son introduction. En Europe il faut attendre 1925 pour que Paul Lévy (1886-1971) en fasse l'une des clés de voute de son ouvrage majeur *Calcul des Probabilités* [Lé25]. Lévy écrit ainsi dans la Préface de son livre :

> « [Les auteurs d'ouvrages antérieurs traitant du calcul des probabilités] ont **négligé systématiquement un point de vue qui me parait assez important**, et c'est avant tout pour le mettre en valeur que j'ai écrit ce livre. (...)
>
> (...) On arrive très simplement au résultat, en utilisant la notion de **fonction caractéristique**. J'ai indiqué cette méthode dès 1920 dans mon cours de l'Ecole Polytechnique. Constatant qu'elle semblait peu connue, et que **son utilisation systématique conduisait à des résultats nouveaux**, j'ai, en 1922 et 1923, présenté à l'Académie des Sciences quelques notes sur ce sujet. Grande a été ma surprise en apprenant par une lettre de M. G. Pólya, écrite à la suite de la première de ces notes, que cette méthode et quelques-uns des résultats que je croyais nouveaux avaient été développés dans des notes présentées par Cauchy à l'Académie des Sciences en 1853 (...). Poincarré, dans la deuxième moitié de son *Calcul des probabilités*, indique en quelques lignes le principe de la méthode de Cauchy ; il semble d'ailleurs qu'il en ait ignoré qu'elle était de Cauchy et il est à peu près certain qu'il n'en a pas vu toute la portée. Aucun des ouvrages publiés depuis n'indique cette méthode, qui semble avoir été ignorée même par les rédacteurs de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*. Aussi ai-je pensé qu'un nouveau livre, consacré en grande partie au **développement systématique de cette méthode**, ne ferait pas double emploi avec les précédents. »

2. Rappelons que Laplace les appelle alors « fonctions génératrices »pour désigner ce que nous appelons aujourd'hui « fonctions caractéristiques ».

A.2 Questions de convergence, estimation des erreurs, « problème de Poisson »

Les problèmes de convergence et d'estimation des erreurs, même s'ils ne sont pas toujours formulés dans des termes rigoureux, sont au cœur des recherches en probabilités au XIXe siècle. Notons qu'à cette période, statistiques et probabilités ne sont pas encore nettement différenciées.

La notion de convergence en loi est approchée très tôt par Johann Bernoulli (1667-1748). Celui-ci donne par ailleurs une première démonstration de la Loi faible des Grands Nombres. Poisson donne quant à lui une première preuve de cette Loi des Grands Nombres en 1829 dans son *Mémoire sur la proportion de naissances des filles et des garçons*, puis une seconde en 1837 dans *Recherche sur la probabilité des jugements*. Quant au Théorème Central Limite, Laplace en donne une preuve non rigoureuse [3] dans sa *Théorie analytique des probabilités*.

Une question qui préoccupe les probabilistes du XIXe siècle est le problème dit « de Poisson » :

Problème de Poisson.

« Une chose A est susceptible de prendre toutes les valeurs entre a et b ; les probabilités de ces valeurs sont différentes entre elles pour la même épreuve, et diffèrent de plus d'une valeur à la suivante : après μ épreuves, chercher :

1. La probabilité P que la somme des valeurs de A sera une quantité donnée S.
2. La probabilité Π que cette somme sera comprise entre deux limites. »

La formulation ci-dessus est celle donnée par Meyer dans son *Calcul des Probabilités*, mais déjà en 1814 Laplace posait des questions similaires dans la *Théorie analytique des Probabilités*, sans toutefois leur donner le nom de « problème de Poisson ». Meyer propose une solution générale de ce problème, dont les calculs s'étalent sur 10 pages.

Meyer prouve également dans son ouvrage deux théorèmes, dits respectivement « de Bernoulli » et « de Poisson », qui s'avèrent être des réponses au problème de Poisson dans certains cas particuliers.

Théorème de Bernoulli.

« Si l'on connait les probabilités simples et constantes, p et q, de deux événements contraires A et B, la probabilité que, dans un très grand nombre $\mu = n + m$ d'épreuves, A arrivera au nombre inconnu m de fois compris entre

$$\mu p \pm \gamma\sqrt{2pq\mu}$$

sera donnée par

$$P = \frac{2}{\sqrt{\omega}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}\mathrm{d}t + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\omega\mu pq}}$$

3. Czuber fournira d'ailleurs en 1891 une analyse des calculs de Laplace visant à en corriger les erreurs.

> ou bien P sera la probabilité que l'écart $\frac{m}{\mu} - p$ est compris entre
>
> $$\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \text{ »}$$

Au sujet de ce « théorème de Bernouli », Czuber expliquera, dans des termes plus modernes, qu'il s'agit en réalité d'un cas particulier du Théorème Central Limite : on parle ici de convergence d'une suite de lois binomiales vers la loi normale.

Le « théorème de Poisson » est présenté par Meyer comme une généralisation du « théorème de Bernoulli » :

> **Théorème de Poisson (généralisation du théorème de Bernoulli).**
>
> « Représentons par $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ les probabilités d'un événement E, $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ les probabilités de l'événement contraire F à la $1^{\text{ère}}, 2^{\text{e}}, \ldots, \mu^{\text{e}}$ épreuve. Supposons qu'en $\mu = m + n$ épreuves, E arrive m fois, F n fois ; soient
>
> $$p = \frac{p_1 + \ldots + p_\mu}{\mu}, q = \frac{q_1 + \ldots + q_\mu}{\mu},$$
>
> je dis : qu'il est à peu près certain que dans ce très grand nombre μ d'épreuves on aura approximativement
>
> $$p = \frac{m}{\mu}, q = \frac{n}{\mu}\,;$$
>
> que ces égalités seront d'autant plus exactes que μ sera grand ; et qu'elles subissent rigoureusement pour $\mu = \infty$. »

A.3 Vers la recherche d'une axiomatique

Avec l'arrivée du XIX$^{\text{e}}$ siècle, une question fondamentale commence à préoccuper les probabilistes : celle de l'axiomatisation des Probabilités. De manière significative, le 6$^{\text{e}}$ problème de Hilbert, formulé en 1900, porte sur l'axiomatisation de la Physique et des Probabilités. On assiste donc, entre 1910 et 1930 en Europe, à un véritable renouveau du monde des probabilités, une « mathématisation » de ce domaine grâce à un travail abstrait sur les fondements et la recherche d'une assise mathématique pour les statistiques.

L'un des personnages les plus emblématiques de ce renouveau est sans conteste le russe Andreï Kolmogorov (1903-1987). En 1920, il étudie la théorie des ensembles et commence à rechercher une axiomatisation des probabilités à l'aide de la théorie de la mesure. En 1933, il publie *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, un monogramme en Allemand d'une soixantaine de pages, dans lequel il propose une axiomatique complète des probabilités. Paul Lévy écrira en 1949 [4] au sujet de ce travail :

> « Kolmogorov a donné à l'axiomatique des probabilités une forme qui semble définitive. »

La puissance de l'axiomatique proposée par Kolmogorov réside dans son très grand niveau d'abstraction, qui tranche avec l'approche probabiliste très « pratique », très appliquée, du XIX^{e} siècle. En s'affranchissant de la question de l'applicabilité de sa théorie, Kolmogorov peut exploiter toute la puissance des théories de Lebesgue et Borel, et parvenir à l'axiomatisation qu'il propose en 1933. Élément intéressant à souligner : le texte de Kolmogorov est traduit en Russe en 1936 pour des raisons politiques [5], mais il faut attendre les années 1950 pour qu'une traduction en Anglais voit le jour ! Autrement dit, avant 1950, l'axiomatique de Kolmogorov n'est presque pas utilisée, et seul le monde mathématique germanophone a accès à ces découvertes.

B Panorama (très) sélectif des connaissances en Analyse au début du XX^{e} siècle

Cette section présente très succinctement quelques aspects des connaissances en Analyse du début du XX^{e} siècle, afin de saisir les outils dont dispose Kameda pour ses recherches.

B.1 La théorie de l'intégration de Lebesgue

Le français Henri Lebesgue (1875-1941) commence à développer sa théorie révolutionnaire de la mesure en 1901, dans sa thèse de doctorat intitulée *Intégrale, longueur, aire* . Il s'agit alors d'une amélioration de la théorie de son compatriote Émile Borel (1871-1956). En 1902, il construit la théorie de l'intégrale qui prendra son nom, et publie en 1904 sa *Leçon sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives*. En 1907, l'italien Guido Fubini (1879-1943) prouve le célèbre théorème de Fubini-Tonelli, ramenant le calcul d'une intégrale double à celui de deux intégrales simples.

La théorie de l'intégration de Lebesgue contribuera de manière significative l'étude des séries de Fourier, et ouvrira la voie à l'axiomatisation des probabilités proposée une vingtaine d'années plus tard par Kolmogorov.

Très tôt, Emile Borel promeut l'utilisation de la théorie de l'intégration de Lebesgue pour traiter des questions de probabilités. Dès 1909, il publie un papier qualifié de « révolutionnaire » dans [CLN04], dans lequel l'utilisation de l'intégrale de Lebesgue lui permet d'obtenir une première version forte de la Loi des Grands Nombres.

4. Dans *Les fondements du calcul des probabilités*, Dialectica, tome 3

5. Sur fond de tensions politiques annonçant la Seconde Guerre Mondiale, les scientifiques russes subissaient alors une importante pression pour qu'ils publient leurs recherches en Russe.

B.2 Hobson et la *Théorie des fonctions d'une variable réelle et Théorie des Séries de Fourier*, 1907

Ernest William Hobson (1856-1933) est un mathématicien anglais. Ce scientifique au profil atypique, autant intéressé par la Physique, les Sciences de la Vie ou encore l'étude des langues étrangères que par les Mathématiques, est amené vers l'analyse moderne par son concitoyen William Henry Young (1863-1942). Il étudie en particulier la convergence de séries de fonctions orthogonales et se spécialise dans l'harmonie sphérique.

En 1907, Hobson publie la première édition de *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series* [Hob07]. Cet ouvrage est salué comme un ouvrage essentiel, notamment par Godfrey Harold Hardy (1877-1947) qui le qualifie de :

> « Livre le plus important écrit par un mathématicien anglais moderne. »

Il s'agit du premier ouvrage en Anglais évoquant la théorie de la mesure et de l'intégration développée par Baire, Borel et Lebesgue. Ce livre, considéré comme l'ouvrage majeur de Hobson, comprend des informations sur la topologie générale, l'analyse réelle et les séries de Fourier. Il comporte à la fois une compilation des découvertes faites récemment en France au sujet de la théorie de la mesure et une présentation du travail de recherche personnel de Hobson sur le « théorème de convergence générale » et la convergence de séries de fonctions orthogonales.

S'il consacre un long passage de son ouvrage à la toute nouvelle théorie de l'intégration de Lebesgue, il est intéressant de noter qu'Hobson utilise par défaut l'intégrale de Riemann dans les développements de son livre. Il donne en particulier des définitions précises des intégrales doubles au sens de Riemann, et aborde avec attention les questions d'interversion de l'ordre de sommation. Cependant, le texte contient plusieurs erreurs, qui seront notamment révélées par Robert Lee Moore (1882-1974) un peu plus tard.

C Comprendre l'œuvre de Kameda à travers une publication charnière

C.1 Histoire d'un article particulier

En 1915, Kameda Toyojiro publie dans les *Proceedings of the Tokyo Mathematico-Physical Society* un article intitulé *Theorie der erzeugenden Fuuktion und ihre Anwendung auf die Wahrscheinlichkeits-Rechnung* [6] [Kam15].

Dans ce texte rédigé en Allemand, l'auteur s'attache à la résolution du « Problème de Poisson » à l'aide des fonctions caractéristiques. Il souligne en l'introduction que l'idée d'utiliser cet outil pour

6. « Théorie des fonctions caractéristiques et applications à la théorie des probabilités ».

la résolution du problème de Poisson lui vient de Tchebychev, qui avait évoqué l'idée dans un article datant de 1891, mais sans la développer.

Pour atteindre son objectif, Kameda mène donc une étude des fonctions caractéristiques d'un point de vue purement analytique, en se détachant complètement de l'approche probabiliste. Ce n'est qu'après avoir mené cette étude qu'il reformule les questions de probabilités qui l'intéressent en termes de fonctions caractéristiques, et utilise les outils analytiques obtenus dans un premier temps pour apporter des réponses et démontrer les résultats qui l'intéressent.

Ce qui rend cet article si particulier, c'est que Kameda le publie une seconde fois, 10 ans plus tard, mais cette fois-ci en Anglais. Le texte est à présent intitulé *Theory of generating functions and its applications to the theory of probability* (traduction exacte du titre en Allemand de 1915), et il est le premier article publié dans le tout nouveau *Journal of the Faculty of Science Imperial University of Tokyo* (volume 1, section 1, partie 1) [Kam25]. Ce nouveau journal, intégralement rédigé en Anglais, vient remplacer le *Journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo*. Ce dernier a existé de 1887 à 1925, et était publié en Anglais, Allemand et Français. Ce changement de nom et de langue de publication est bien entendu une démarche politique : après la Première Guerre Mondiale et la défaite de l'Allemagne, l'Anglais est en train de s'affirmer comme la langue internationale des Mathématiques, et le Japon ne veut pas s'isoler linguistiquement.

La version de l'article de 1925 présente un contenu très similaire à celui de 1915. Kameda a toutefois réorganisé la structure de son texte, le rendant plus lisible et structuré, et il a épuré certaines démonstrations. L'auteur y a également ajouté quelques éléments issus d'autres articles publiés entre 1915 et 1925, mais dans l'ensemble l'article de 1925 peut être décrit comme une « traduction restructurée » de la publication de 1915.

C.2 Contenu mathématique

On présente ici un résumé du contenu strictement mathématique de l'article *Theory of generating functions and its applications to the theory of probability*, dans sa version de 1925 (la plus aboutie et structurée). L'objectif étant de fournir un aperçu de la démarche de Kameda, les preuves ne sont pas développées, et seuls les résultats essentiels sont consignés.

Kameda explique en introduction de son texte que son objectif principal est de résoudre le problème de Poisson, qu'il présente en reprenant mot pour mot la formulation donnée par Meyer dans son *Calcul des Probabilités*.

L'article est divisé en trois chapitres :

1. **Théorie des fonctions caractéristiques**, où l'auteur conduit une étude détaillée des propriétés des fonctions caractéristiques, d'un point de vue strictement analytique. Plus spécifiquement, il s'attache à rechercher un moyen de les *inverser*, et fournit pour cela une première méthode utilisant le Théorème intégral de Fourier.
2. **Théorie des développements en série de Hermite**, où Kameda développe une seconde

méthode d'inversion, utilisant le développement en séries de Hermite des fonctions caractéristiques. Remarquons également que dans ce chapitre, Kameda parvient à fournir, grâce aux fonctions génératrices, des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit développable en séries de Hermite.

3. **Application à la théorie des probabilités**, où il propose une résolution du problème de Poisson sous une forme généralisée, en utilisant la méthode d'inversion des fonctions caractéristiques par les séries de Hermite.

On présente ci-dessous les points essentiels développés par Kameda dans chacun des chapitres.

1. Théorie des fonctions caractéristiques.

Kameda définit les fonctions caractéristiques avec un point de vue purement analytique :

> **Fonction caractéristique du premier type.**
>
> Soit $f(x)$ une function de la variable réelle x. Alors l'intégrale
>
> $$J(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) \mathrm{d}x$$
>
> considérée comme une fonction de la variable complexe α, est appelée **fonction caractéristique du premier type** de $f(x)$, et la fonction $f(x)$ est appelée sa **primitive**. On appellera **inversion d'une fonction caractéristique** la recherche de sa primitive.

Dans cette définition, on fait l'hypothèse que f est *bornée* et *intégrable (au sens de Riemann) sur tout intervalle borné*.

Cette définition permet d'établir, sous réserve d'existence de l'intégrale ci-dessus, une correspondance entre fonctions de la variable réelle $f(x)$ et une certaine classe de fonctions complexes $F(\alpha)$, via la transformation $F(\alpha) = J(f)$.

Dans une démarche analytique rigoureuse, Kameda commence par interroger le domaine de validité de son étude, et s'intéresse donc dans un premier temps aux valeurs de la variable complexe α pour lesquelles l'intégrale ci-dessus existe (« région de convergence » de la fonction caractéristique), et prouve le théorème suivant.

> **Théorème (Région de convergence).** La **région de convergence**, si elle existe, d'une fonction caractéristique, considérée comme fonction de la variable complexe α, est :
>
> (i) Soit le plan complexe entiern.
>
> (ii) Soit un demi plan complexe dont les frontières sont parallèles à l'axe des imaginaires purs.
>
> (iii) Soit une région bornée par deux frontières parallèles à l'axe des imaginaires purs (« bande »).

(iv) Soit un ensemble de point alignés sur le même axe parallèle à l'axe des imaginaires purs.

Il démontre ensuite que :

Théorème (Fonction analytique).

Une fonction caractéristique, considérée comme fonction de la variable complexe α, est une fonction analytique.

L'auteur s'attache ensuite à établir les correspondances entre opérations (addition, dérivation, intégration, exponentiation...) sur les fonctions de la variable réelle $f(x)$ et opérations sur les fonctions caractéristiques correspondantes $F(\alpha)$. Il présente dans son article la table ci-dessous, qui résume l'ensemble des propriétés qu'il démontre.

Théorème (Correspondance d'opérations).

Dans la table ci-dessous, $F(\alpha)$ dénote $J(f)$ et $G(\alpha)$ dénote $J(g)$, h, c, c_0, c_1, w_0, w_1 sont des constantes réelles quelconques, et p est une constante réelle positive.

Primitives	**Fonctions caractéristiques**
$xf(x)$	$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}F(\alpha)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$\alpha F(\alpha)$
$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$	$\frac{1}{\alpha}F(\alpha)$
$f(x+h)$	$e^{h\alpha}F(\alpha)$
$e^{-hx}f(x)$	$F(\alpha+h)$
$f(cx), c>0$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{\alpha}{c}\right)$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$	$F(\alpha)G(\alpha)$
$\int_{x-c_1}^{x-c_0} g(t)\mathrm{d}t$	$G(\alpha)\frac{e^{-c_0\alpha}-e^{-c_1\alpha}}{\alpha}$
$f(x)\frac{e^{w_0x}-e^{w_1x}}{x}$	$\int_{\alpha-w_0}^{\alpha-w_1} F(\beta)\mathrm{d}\beta$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(i\beta)G(\alpha-i\beta)\mathrm{d}\beta$
$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{p-1}\mathrm{d}t$	$\frac{1}{\alpha^p}F(\alpha)$

Une fois ces outils de calcul établis, Kameda propose une première méthode d'inversion des fonctions caractéristique basée sur le théorème intégral de Fourier, qu'il formule de la manière suivante :

Théorème intégral de Fourier.

Si $f(x)$ a des variations totales bornées sur tout intervalle borné et est telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ existe, alors :

$$\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{K\to+\infty}\int_0^K\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\cos(\alpha(x-x'))\mathrm{d}x'\mathrm{d}\alpha$$

Notons que ce que Kameda appelle « variation totale » d'une fonction de la variable réelle ou complexe f définie sur un intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}$ est la quantité : $V_a^b(f) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n_P-1} |f(x_{i+1})-f(x_i)|$, où le sup porte sur l'ensemble des partitions de l'intervalle $[a,b]$: $\mathcal{P} = \{P = \{x_0,\dots,x_{n_P}\} | P \text{ is a partition of } [a,b]\}$.

En manipulant cette formule, Kameda parvient à formuler le théorème ci-dessous, qui permet de retrouver la valeur de la primitive d'une fonction caractéristique donnée en tout point, à l'exception de ses points de discontinuité.

Théorème (Inversion des fonctions caractéristiques).

Soit $F(\alpha)$ la fonction caractéristique d'une fonction $f(x)$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ existe et ait une variation totale bornée sur tout intervalle borné. Alors :

$$\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{K\to+\infty}\int_{-K}^{K} F(i\alpha)e^{i\alpha x}\mathrm{d}\alpha$$

Kameda donne ensuite la définition suivante.

Fonction caractéristique du deuxième type.

Soit $\overline{f}(x)$ une fonction définie sur un ensemble discret de points, fini ou infini, $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Alors la somme :

$$\overline{J}(\overline{f}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{f}(x_k)e^{-\alpha x_k},$$

considérée comme une fonction de α, est appelée **fonction caractéristique du second type** de $\overline{f}(x)$.

Il démontre alors le théorème suivant, permettant de réduire l'étude des fonctions caractéristiques du second type à celle des fonctions caractéristiques du premier type.

Theoreme (Réduction des fonctions caractéristiques du second type à celles du premier type.

Soit $\overline{J}(\overline{f})$ la fonction caractéristique du second type de la fonction $\overline{f}(x)$, définie sur l'ensemble de points $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Définissions la fonction $f(x)$ par :

$$f(x) = \sum_{[x-l,x+h[} \overline{f}(x_k)$$

où la sommation porte sur l'ensemble des points $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ compris dans l'intervalle $[x-l, x+h[$, où l et h sont deux constantes réelles telles que $-l < h$. Alors :

$$J(f) = \overline{J}(\overline{f})\tfrac{e^{h\alpha}-e^{-l\alpha}}{\alpha}$$

pour toute valeur réelle de α telle que $\overline{J}(\overline{f})$ converge.

Par conséquent, pour trouver la primitive d'une fonction caractéristique du second type, il suffit de :

1) La « transformer » en fonction caractéristique du premier type à l'aide du dernier théorème ci-dessus.
2) Trouver la primitive de cette fonction caractéristique du premier type, à l'aide par exemple de la méthode d'inversion basée sur le théorème intégral de Fourier.
3) Si les réels h et l utilisés pour la transformation en fonction caractéristique du premier type sont choisis convenablement, cela permet de retrouver la valeur de la primitive de la fonctionn caractéristique du second type en n'importe quel point où elle est définie.

L'étude de l'inversion des fonctions caractéristiques du premier type est donc suffisante : il est inutile de mener une étude comparable pour les fonctionc caractéristiques du second type.

2. Théorie des développements en série de Hermite.

Kameda aborde dans cette section un autre domaine de l'analyse : les développements de fonctions en séries de Hermite. Il commence par donner les deux définitions ci-dessous.

Polynôme de Hermite.

On appelle polynôme de Hermite une expression de la forme suivante :

$$P_n(x,c) = e^{c^2x^2}\tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-c^2x^2}\right)$$

avec c une constante positive.

Développement en série de Hermite.

On appelle développement en série de Hermite d'une fonction $f(x)$ une expression de la forme suivante :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2x^2} P_n(x,c) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2x^2}\right)$$

Kameda explique que Hermite avait réussi à calculer les coefficients $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de développement en série de Hermite d'une fonction arbitraire $f(x)$, mais sans parvenir à exprimer des conditions suffisantes à un tel développement. Kameda, lui,affirme avoir trouvé de telles conditions.

Théorème (Conditions suffisantes au développement d'une fonction en série de Hermite).

Soit $f(x)$ une fonction ayant une variation totale bornée sur tout intervalle bornéet telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge. Supposons de plus que la fonction caractéristique de $f(x)$ converge sur tout le plan complexe, de sorte qu'on puisse écrire :

$$J(f) = e^{\frac{\alpha^2}{4c^2}} \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \alpha^n$$

Si la série :

$$\frac{c}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n|\ \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(2c)^n \tag{2.1}$$

converge, alors $f(x)$ peut être exprimée sous la forme d'une série de Hermite absolument et uniformément convergente :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2x^2}\right) \tag{2.2}$$

De plus, (2.1) fournit un majorant de (2.2).

Kameda présente ensuite une série de calculs aboutissant au théorème suivant, lequel permet de retrouver le développement en série de Hermite d'une fonction à partir de l'expression de sa fonction caractéristique.

Théorème (Inversion des fonctions caractéristiques, seconde méthode).

Toute fonction continue $f(x)$ peut être développée sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{c}{\sqrt{\pi}}e^{-c^2(x+b)^2}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n c^{n+1}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\right)\right]_{z=c(x+b)}$$

où c et b sont des constantes réelles, si au moins l'une des quatre dérivées de Dini de la fonction $f(x)e^{c^2(x+b)^2}$ a une variation totale bornée eur tout l'intervalle $]-\infty,+\infty[$. De plus, les coefficients A_n sont alors identiques à ceux de la série :

$$J(f)e^{\frac{-\alpha^2}{4c^2}-b\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\alpha^n$$

Ceci fournit une seconde méthode d'inversion des fonctions caractéristiques.

3. Application à la théorie des probabilités.

Kameda commence ce chapitre en posant minutieusement les définitions nécessaires à la réduction de problèmes de probabilités à des questions d'analyse, lui permettant d'exploiter les résultats théoriques généraux des deux chapitres précédents.

Distribution de probabilité du premier type.

Si la probabilité que la valeur d'une variable x soit comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$ est $f(x)$, avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, alors $f(x)$ est appelée **distribution de probabilité** de x. Une distribution de probabilité de cette forme est dite **du premier type**.

Distribution de probabilité du second type.

Soit x une variable pouvant prendre une quantité discrète, finie ou infinie, de valeurs, qu'on note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, avec probabilités respectives $\left(\overline{f}(x_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$, où $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\overline{f}(x_k) = 1$. Alorsl $\overline{f}(x)$ est appelée **distribution de probabilité** de x. Une distribution de probabilité de cette forme est dite **du second type**

Distribution de probabilité du premier type.

Soient $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n variables, que l'on considérera comme les coordonnées d'un point mobile dans un espace à n dimensions. Si la probabilité que ce point soit situé dans le parallélépipède défini par les $2n$ plans :

$$x_1 = \overline{x_1}\ ;\ x_1 = \overline{x_1} + \mathrm{d}x_1\ ;\ \cdots\ ;\ x_n = \overline{x_n}\ ;\ x_n = \overline{x_n} + \mathrm{d}x_n$$

est $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$, alors on appelle $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la **distribution de probabilité** des variables $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, qui est alors dite **du premier type**.

Distribution de probabilité du second type.

Soient $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n variables, que l'on considérera comme les coordonnées d'un point mobile dans un espace à n dimensions. i la probabilité que ce point soit situé exactement au point de coordonnées $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$ est $f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$, alors on appelle $f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$ la **distribution de probabilité** des variables $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, qui est alors dite **du second type**.

Il s'agit alors pour Kameda de résoudre le problème ci-dessous.

Problème.

Soient $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n variables dont la distribution de probabilté $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est connue. On recherche la distrbution de probabilité d'une fonction quelconque $\xi(x_1, \ldots, x_n)$ de ces variables.

Pour ce faire, l'auteur utilise une stratégie de résolution en deux temps :

1) Trouver la fonction caractéristique de la distribution de probabilité de la variable $\xi(x_1, \ldots, x_n)$.
2) A partir de cette fonction caractéristique, calculer la disctribution de probabilité de $\xi(x_1, \ldots, x_n)$, i.e. inverser la fonction caractéristique, grâce à l'une des méthodes précédemment exposées.

Pour effectuer le point 1) de cette stratégie de résolution, Kameda démontre les deux théorèmes ci-dessous [7].

Théorème.

Soient $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n variables sont la distribution de probabilité du premier type est $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Alors la fonction caractéristique de la distribution de probabilité de la variable $\xi = \xi(x_1, \ldots, x_n)$ est donnée par l'intégrale :

$$\int \int \cdots \int e^{-\alpha \xi(x_1, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

où le domaine d'intégration est la région sur laquelle la fonction $\xi(x_1, \ldots, x_n)$ prend des valeurs réelles.

7. Ces deux théorèmes correspondent en réalité au résultat aujourd'hui connu sous le nom de « théorème de transfert ».

Théorème.

Soient $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n variables sont la distribution de probabilité du second type est $\overline{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Alors la fonction caractéristique de la distribution de probabilité de la variable $\xi = \xi(x_1, \dots, x_n)$ est donnée par la somme :

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2}\cdots\sum_{x_n} e^{-\alpha\xi(x_1,\dots,x_n)}\overline{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

où la sommation porte sur toutes les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ pour lesquelles la fonction $\xi(x_1, \dots, x_n)$ prend des valeurs réelles.

Muni de ces résultats, Kameda s'attache alors à résoudre le problème suivant.

Problème.

Notons p la probabilité qu'un évènement donné se produise lors d'une expérience réalisée une unique fois. Après s réalisations de cette expérience, donner :

(i) La probabilité que cet événement se soit produit ν fois.

(ii) La probabilité que cet évènement se soit produit un nombre de fois compris entre λ et μ (inclus).

Kameda résout ce problème en appliquant la stratégie suivante :

1) On note $x_k = 0$ ou 1 selon que l'événement étudié se produit à la k-ième réalisation de l'expérience. Il s'agit donc d'étudier la distribution de probabilité de la somme $\xi = x_1 = x_2 + \cdots + x_s$.
2) On recherche la fonction caractéristique de la distribution de probabilité de la somme ξ grâce au théorème précédent. Les calculs donnent :
$$\overline{F}(\alpha) = (pe^{-\alpha} + q)^s \text{ where } q = (1-p)$$
3) On convertit la fonction caractéristique du second type $\overline{F}(\alpha)$ en fonction caractéristique du premier type. Soient $(P_m)_{m\in[\![1,s]\!]}$ s points tels que $\forall m \in [\![1, s]\!]$, $P_m(m, w_m)$, où w_m est la probabilité que ξ prenne la valeur m. Soient A et B deux autres points : $A(-1, 0)$ et $B(s+1, 0)$. Soit $f(x)$ la fonction représentée par la ligne brisée joignant ces points. On obtient alors :
$$J(f) = \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{\frac{-\alpha}{2}}}{\alpha}\right)^2 \overline{F}(\alpha) = \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{\frac{-\alpha}{2}}}{\alpha}\right)^2 (pe^{-\alpha} + q)^s$$
4) On peut à présent résoudre le problème (i) en obtenant l'expression du développement en série de Hermite de $f(x)$.
5) Pour résoudre le problème (ii), il s'agit de calculer la somme : $\Pi = f(\lambda) + f(\lambda+1) + \cdots + f(\mu-1) + f(\mu)$. Une figure convainc facilement que :
$$\Pi = \int_\lambda^\mu f(x)\mathrm{d}x + \frac{f(\lambda)}{2} + \frac{f(\mu)}{2}$$

Cette intégrale peut à présent être calculée, grâce à l'expression de $f(x)$ obtenue à l'étape 4) de ce raisonnement et en intégrant par parties.

Cette méthode de résolution est facilement adaptable au cas où la probabilité de réalisation de l'événement change d'un essai à l'autre.

Finalement, Kameda propose une résolution d'une version généralisée du problème de Poisson.

Problème de Poisson généralisé.

Soient $(x_k)_{k\in[\![1,s]\!]}$ s variables indépendante dont les distributions de probabilité $f_k(x)$ sont connues. Il s'agit de trouver :

(i) La distribution de probabilité de la fonction linéaire $\xi = \sum_{k=1}^{s} a_k x_k$, où les $(a_k)_{k\in[\![1,s]\!]}$ sont des constantes réelles.

(ii) La probabilité que la fonction ξ prenne une valeur comprise entre λ et μ.

La stratégie de résolution de Kameda est la suivante :

1) Calculer $J(f(\xi))$.
2) Prouver que la fonction $f(\xi)$ satisfait les conditions d'application du théorème permettant d'inverser $J(f(\xi))$ au moyen des séries de Hermite.
3) Calculer les coefficients du développement en série entière de $J(f(\xi))$, afin de pouvoir inverser $J(f(\xi))$ au moyen des séries de Hermite et ainsi résoudre le problème (i).
4) Intégrer l'expression de $f(\xi)$ de λ à μ pour résoudre le problème (ii).

C.3 Enjeux et spécificités

Le choix du tout premier article à publier dans un nouveau journal scientifique n'est jamais anodin. Le fait que le moderne *Journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo* mette en avant cet article particulier de Kameda signifie plusieurs choses :

1. Cet article spécifique revêt une importance toute particulière dans l'oeuvre de Kameda.
2. Kameda a assis une légitimité académique, et est suffisamment reconnu dans le milieu universitaire japonais pour être celui qui signe le premier article de ce nouveau journal.
3. Les mathématiques présentées dans cet article sont jugées suffisamment importantes pour que ce nouveau journal japonais veuille leur donner une visibilité internationale, grâce à la publication d'une version en Anglais.

Le premier de ces trois points est avéré, pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, l'article de 1915 est l'une de ses toutes premières publications, et il sera le point de départ de plusieurs publications ultérieures. Dès 1916, Kameda publie dans le *Tokyo Math. Ges.*

un article intitulé *Über zwei Probleme in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*[8] [Kam16], dans lequel il exploite les résultats qu'il a démontrés un an plus tôt au sujet des séries de Hermite, ainsi que sa résolution du problème de Poisson par les fonctions caractéristique. En 1917, il publie dans le même journal *Eine Verallgemeinerung des Poissonschen Problems in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung*[9] [Kam17], dans lequel il généralise la résolution du problème de Poisson par les fonctions caractéristique présentée dans l'article de 1915. De manière plus périphérique, en 1919, Kameda publie dans le *Tohôku Mathematical Journal* un article intitulé *On the Theory of Finite Differences* [Kam19], dans lequel il utilise à nouveau quelques résultats (relativement anecdotiques) relatifs aux fonctions caractéristiques issus de son article de 1915. Ces utilisations ultérieures des résultats prouvés dans son article, combinées au fait que ledit article sera traduit et republié en 1925, tendent à démontrer qu'il s'agit d'une publication-clé, qui est à la racine de la démarche scientifique de Kameda, de sa manière de penser les Mathématiques.

Par ailleurs, un autre aspect faisant de cet article un texte particulièrement représentatif de l'œuvre de Kameda est celui des références qui y sont données. En effet, Kameda donne très minutieusement toutes les sources sur lesquelles il s'appuie, dans la version de 1915 comme dans celle de 1925, ce qui fournit un aperçu relativement exhaustif des auteurs et ouvrages ayant forgé sa culture mathématique.

Sa principale référence en analyse est l'ouvrage de Hobson *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, auquel il fait référence plus de 12 fois dans son article de 1915 comme dans celui de 1925.

Kameda explique par ailleurs que les résultats analytiques qu'il obtient sur les fonctions caractéristiques sont une généralisation de ceux récemment obtenus par l'Allemand Edmund Landau (1877-1938).

De plus, on constate à la lecture des références de Kameda que sa culture probabiliste provient essentiellement des ouvrages d'Emmanuel Czuber et Antoine Meyer, et qu'il attache également une importance toute particulière aux questions formulées par Laplace en début du siècle précédent - en particulier le problème de Poisson.

Kameda est donc un personnage combinant une culture probabiliste germanophone et une culture analytique anglophone, et c'est en mêlant ces différentes connaissances et approches qu'il effectue ses recherches. Son approche transversale des problèmes de probabilités, qu'il aborde sous un angle relativement abstrait, avec des outils purement analytique, fait de lui un mathématicien moderne, pleinement ancré dans la démarche probabiliste du XX$^{\text{e}}$ siècle.

Concernant le second point de la liste et la renommée de Kameda, on connait peu de choses des échanges concrets de Kameda avec d'autres mathématiciens. Toutefois, quelques éléments connus convergent pour étayer l'hypothèse d'une légitimité académique reconnue :

— En 1925, Charles Jordan, adresse à Kameda un article traitant de l'axiomatisation de la théorie des probabilités.

8. « Au sujet de deux problèmes en théorie des probabilités ».
9. « Une généralisation du problème de Poisson en calcul des probabilités ».

— Harald Cramer (1893-1985), mathématicien scandinave à la pointe des questions d'approximation, cite Kameda en 1928 dans son article *On the composition of elementary errors*.

Enfin, au sujet de la modernité des mathématiques de Kameda (troisième élément de la liste ci-dessus), il est intéressant de soulever deux points relativement antagonistes.

D'une part, Kameda fait dès 1915 une utilisation des fonctions caractéristiques qui semble relativement inédite pour l'époque. En effet, si cet outil a été introduit près d'un siècle plus tôt, on a vu que son utilisation pour résoudre des problèmes probabilistes reste très anecdotique jusqu'à ce que Lévy en fasse la promotion dans son *Calcul des Probabilités* en 1925. En cela, Kameda fait preuve d'une grande modernité, en allant chercher l'utilisation des fonctions caractéristiques faite par certains de ses contemporains et en mettant en avant toute la puissance que peut avoir un usage plus systématique de ces outils. Cette modernité est d'autant plus surprenante qu'au Japon, les probabilités peinent longtemps à s'imposer comme sujet mathématique digne d'intérêt : le mathématicien japonais Itô Kiyoshi (1915-2008) affirme en 1987 dans la préface de ses *Selected Papers* que jusque dans les années 1930, la théorie des probabilités n'était pas très populaire au Japon.

Mais d'autre part, Kameda prend la peine de préciser, dans la version de 1915 de son article comme dans celle de 1925, qu'il n'utilise que la théorie de l'intégration de Riemann dans ses développements - pas celle de Lebesgue. Un tel choix peut sembler surprenant, à l'heure où la théorie de la mesure de Lebesgue était en train de conquérir le monde de l'analyse et faisait son apparition dans celui des probabilités. Ainsi Kameda n'invoque-t-il jamais, par exemple, le théorème de Fubini-Tonelli : il justifie « à la main », une par une, toutes les interversions dans l'ordre d'intégration qui interviennent dans ses calculs. Cet élément pousse à s'interroger sur la précision des connaissances qu'a pu avoir Kameda des théories de Lebesgue, et de la conscience qu'il a pu avoir de la puissance de celle-ci.

Ces éléments quelque peu paradoxaux soulignent le caractère encore « jeune » de la tradition de recherche mathématique au Japon au début du XX^{e} siècle : les connaissances occidentales, et en particulier les nouvelles découvertes, ne se diffusent pas toutes à la même vitesse jusqu'au Japon. Et si le pays s'est rapidement inscrit dans une dynamique d' « internationalisation » de la recherche mathématique, et a pu produire dès le début du siècle des scientifiques de renom, il n'en reste pas moins que l'alignement réel du Japon sur le niveau de connaissances et de compétences mathématiques occidentales n'était pas entièrement achevé dans les années 1920.

Conclusion : Kameda Toyojiro, personnage de transition

Kameda Toyojiro est un personnage dont le parcours est emblématique du monde mathématique dans le Japon du début du XX^{e} siècle. Tant sur le plan de son parcours personnel que sur celui de son apport mathématique, il est le symbole d'un pays en transition scientifique, mais également politique et sociétale.

Héritier direct des transformations du modèle d'enseignement au Japon au début de l'ère Meiji, il acquiert une culture probabiliste essentiellement germanophone et marquée par les auteurs allemands. Il parfait ses connaissances mathématiques avec la lecture d'auteurs anglophones sur des sujets d'analyse. L'importante question du langage - clé de l'ouverture scientifique et de l'internationalisation de la recherche, et pourtant intrinsèquement soumise aux aléas historiques et politiques - transparait nettement à travers son oeuvre : il cite des ouvrages aussi bien en Allemand qu'en Anglais, publie d'abord essentiellement en Allemand puis passe à la langue de Shakespeare à l'issue de la Première Guerre Mondiale, et il va même jusqu'à traduire son article-phare de l'Allemand à l'Anglais 10 ans après sa première publication.

Il propose une approche très moderne de questions classiques de probabilités en les traitant à l'aide d'outils analytiques abstraits. Il propose notamment un usage quasi inédit des fonctions caractéristiques pour résoudre le « problème de Poisson », 10 ans avant que le français Paul Lévy ne généralise leur usage pour des démonstrations de ce type. Kameda acquiert au cours de sa carrière une reconnaissance académique et une certaine visibilité internationale, devenant ainsi l'un des représentant d'un Japon résolument déterminé à s'affirmer comme une véritable puissance scientifique.

Outre ce rôle d'ambassadeur des probabilités japonaises à l'étranger, il fait peu de doute que la notoriété de Kameda combinée à ses qualités rédactionnelles ont fait de lui un « passeur de savoirs », un vecteur de transmission des connaissances depuis l'Europe vers le Japon. La méticulosité avec laquelle il répertorie ses sources et le fait qu'il reprenne en l'état et/ou généralise certains résultats préalablement démontrés par des européens ont largement dû contribuer à la diffusion, au Japon, des connaissances mathématiques occidentales.

Bibliographie

[bioa] Biographie en ligne de Ernest William Hobson. `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Hobson.html`. Consultée en juin 2019.

[biob] Biographie en ligne de Ernest William Hobson sur encyclopedia.com. `https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/hobson-ernest-william`. Consultée en juin 2019.

[bioc] Biographie en ligne de Toyojiro Kameda. `http://jahis.law.nagoya-u.ac.jp/who/docs/who8-6530`. Consultée en juin 2019.

[biod] Page Wikipédia de Ernest William Hobson. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Ernest_William_Hobson`. Consultée en juin 2019.

[BL04] Evelyne Barbin and Jean-Pierre Lamarche. *Histoires de probabilités et de statistiques.* Ellipses, 2004.

[CLN04] Eric Charpentier, Annick Lesne, and Nikolaï Nikolski. *L'Héritage de Kolmogorov en Mathématiques.* Belin, 2004.

[Czu08] Emanuel Czuber. *Wahrscheinlichkeits Rechnung.* 1908.

[Hob07] Ernest William Hobson. *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourrier's Series.* 1907.

[HS08] Bertrand Hauchecorne and Daniel Suratteau. *Des Mathématiciens de A à Z.* Ellipses, 2008. (3e édition).

[jap97] *Japanische Studenten an der Berliner Universität, 1870-1914.* Hartmann and Mori-Ôgai-Gedenkstätte, 1997.

[jou] Hati Trust, Digital Library. `https://catalog.hathitrust.org/Record/006166049`. Consulté en juin 2019.

[Kam15] Toyojiro Kameda. « Theorie der erzeugenden Fuuktion und ihre Anwendung auf die Wahrscheinlichkeits-Rechnung ». *Proceedings of the Tokyo Mathematico-Physical Society, Vol. VIII*, pages 262–295, 336–359, 1915.

[Kam16] Toyojiro Kameda. « Über zwei Probleme in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ». *Tokyo Math. Ges.*, 1916.

[Kam17] Toyojiro Kameda. « Eine Verallgemeinerung des Poissonschen Problems in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung ». *Tokyo Math. Ges.*, 1917.

[Kam19] Toyojiro Kameda. « On the Theory of Finite Differences ». *Tohoku Mathematical Journal, Vol. 16.*, 1919.

[Kam25] Toyojiro Kameda. « Theory of generating functions and its applications to the theory of probability ». *Journal of the Faculty of Science Imperial University of Tokyo, Sec. 1, Vol. 1, Part 1*, pages 1–62, 1925.

[Lé25] Paul Lévy. *Calcul des Probabilités.* 1925.

[Lap14] Pierre-Simon de Laplace. *Théorie analytique des Probabilités.* 1814. (2e édition).

[Mey74] Antoine Meyer. *Calcul des Probabilités.* 1874. (posthume).

[Sas94] Chikara Sasaki. « The Adoption of Western Mathematics In Meiji Japan, 1853-1903 ». *The Intersection of History and Mathematics, Science Networks - Historical Studies, Vol. 15*, pages 165–186, 1994.

[SB09] Jean-Jacques Samueli and Jean-Claude Boudenot. *Une Histoire des probabilités, des origines à 1900.* Ellipses, 2009.

[SY14] David Eugene Smith and Mikami Yoshio. *A History of Japaese Mathematics.* 1914.