

## Colles de la semaine du 18 au 22 décembre 2017

**Cours 1.** Caractérisation séquentielle de la densité.

**Cours 2.** Densité des décimaux dans  $\mathbb{R}$ .

**Cours 3.** Caractérisation séquentielle du sup.

**Cours 4.** Soit  $a \in \mathbb{C}^*$ . Montrer que  $a^n = o(n!)$ .

**Cours 5.** Passage au logarithme dans les équivalents.

**Calculs :** Déterminer un équivalent simple de

$$2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \quad \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \quad \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n^{5/3}}.$$

**Exercice 1.** Étudier la suite définie par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$ .

**Exercice 2 :** Soit  $a_n$  la plus grande racine réelle de  $X^{2n} - 2nX + 1$ . Donner un développement asymptotique à deux termes de  $a_n$ .

**Exercice 3 :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ . Donner un équivalent de  $u_n$ .

**Exercice 4 :** Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Étudier la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$ .

**Exercice 5 :** On définit les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la donnée de  $a_0 > 0$  et  $b_0 > 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right).$$

Étudier la convergence de ces suites. Soit  $\ell = \lim a_n$ , Donner un équivalent de  $a_n - \ell$ .