Colles de la semaine du 15 au 19 janvier 2018

Cours 1. Caractérisation séquentielle de la limite.

Cours 2. Théorème de passage à la limite

Cours 3. Théorème d'encadrement

Cours 4. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. f a une limite en a si, et seulement si, f a des limites à droite et à gauche en a et $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{a^+} f = f(a)$.

Cours 5. Théorème de la limite monotone.

Cours 6. Théorème de prolongement par continuité.

Exercice 1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application telle que pour tout $x \in]a,b[$, les limites à gauche $f(x^-)$ et à droite $f(x^+)$ existent et telle que $f(a^+)$ et $f(b^-)$ existent. Pour $x \in]a,b[$, on définit

$$\omega(f,x) = \max(|f(x^-) - f(x)|, |f(x^+) - f(x)|.$$

1. Soient $\varepsilon > 0$ et xß$]a,b[$ tels que $\omega(f,x) < \varepsilon$. Montrer $\exists \alpha > 0, \forall y,z \in]x-\alpha, x+\alpha[,\ |f(y) - f(z)| < 2\varepsilon$.
2. Soient $\varepsilon > 0$ et $]c,d[\subset]a,b[$ tels que $\omega(f,\cdot) < \varepsilon$ sur $]c,d[$. Montrer $\exists \alpha > 0, \forall x,y \in]c,d[,\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < 2\varepsilon$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'ensemble $A_\varepsilon = \{x \in]a,b[,\ \omega(f,x) \geq \varepsilon\}$ est fini.

Exercice 2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f converge en $+\infty$, g est périodique, et $f+g$ est croissante. Montrer que g est constante.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $f(x) + f(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Étudier la limite de f en $+\infty$. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 4. Soit f une fonction définie au voisinage de 0 telle que $0 = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 5. Déterminer un équivalent simple de $x^{1/x} - 1$ au voisinage de $+\infty$. En déduire un équivalent simple de $x^{x^{1/x}} - x$. Étudier la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\left((x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}\right)(x \ln x)^2}{x^{1/x} - x}$.

Exercice 6. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.