Colles de la semaine du 12 au 16 février 2018

Cours 1. Degré du produit de deux polynômes.

Cours 2. Existence d'une relation de Bézout.

Cours 3. Existence et unicité du PPCM.

Cours 4. Factorisation en produit d'irréductibles unitaires.

Cours 5. Caractérisation de la multiplicité d'une racine d'un polynôme.

Cours 6. Existence et unicité du polynôme interpolateur de Lagrange.

Exercice 1.

1. Développer $P = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\cdots(1+X^{2^n})$.
2. Montrer que tout entier $k > 0$ s'écrit de façon unique comme somme de puissance de 2 sans répétition.

Exercice 2. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathrm{pgcd}(T^m - 1, T^n - 1) = T^{\mathrm{pgcd}(m,n)} - 1$.

Exercice 3. Déterminer une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 4. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P \equiv 1 \bmod X^7 - X - 1$ et $P \equiv -1 \bmod X^5 + 1$.

Exercice 6. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si ξ est racine de P alors $|\xi| \leq 1 + \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$.