Colles de la semaine du 12 au 16 mars 2018

Cours 1 Existence et unicité de la forme irréductible d'une fraction rationnelle.

Cours 2 Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle.

Cours 3 Partie polaire dans le cas d'un pôle simple.

Cours 4 Formule de Taylor-Young.

Cours 5 Primitivation d'un développement limité.

Cours 6 Développement limité à l'ordre 5 en 0 de tan.

Exercice 1.1 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$

Exercice 1.2 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F=\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$.

Exercice 1.3 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F=\dfrac{3X^2+2X-1}{X^2(X+1)^3}$.

Exercice 2.1 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.

Exercice 2.2 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \ln(2+\sin x)$.

Exercice 2.3 Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{6}$ de $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{3}\sin x\right)$.

Exercice 3.1 Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et $b_1,\dots,b_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. On suppose que

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \qquad a_i+b_j \neq 0.$$

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x_1}{a_1+b_1}+\dfrac{x_2}{a_2+b_1}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n+b_1} & = & 1 \\ \dfrac{x_1}{a_1+b_2}+\dfrac{x_2}{a_2+b_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n+b_2} & = & 1 \\ & \vdots & \\ \dfrac{x_1}{a_1+b_n}+\dfrac{x_2}{a_2+b_n}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n+b_n} & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3.2 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1,\dots,x_n$ tel que $P(0)\neq 0$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)}.$$

Exercice 3.3 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $\omega_0,\dots,\omega_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité. Réduire au même dénominateur la fraction rationnelle $F=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}$.