Colles de la semaine du 25 au 30 septembre 2017

Questions de cours

Cours 1. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f s'annule
2. f est la fonction nulle
3. f n'est pas une fonction constante
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur
5. f présente un minimum
6. f prend des valeurs arbitrairement grandes
7. f ne peut s'annuler qu'une seule fois

Cours 2. Soient E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathfrak{P}(E)^3$. Démontrer les égalités suivantes :

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Cours 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et celle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Cours 4. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Cours 5. Énoncer et démontrer la formule de Pascal.

Exercices

Exercice 1. Soient E un ensemble et $(A, B) \in \mathfrak{P}(E)^2$. On appelle différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$, la partie de E définie par :

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B).$$

1. Montrer que $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
2. On suppose que $A\Delta B = A \cap B$. Montrer que $A = B = \emptyset$.
3. Soit $C \in \mathfrak{P}(E)$. Montrer que $A\Delta B = A\Delta C$ si et seulement si $B = C$.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathfrak{P}(E)$: $A\Delta X = \emptyset$.

Exercice 2. Soient E un ensemble et $(A, B) \in \mathfrak{P}(E)^2$. Résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathfrak{P}(E)$ suivantes.

1. $X \cup A = B$.
2. $X \cap A = B$.

Exercice 3. Montrer que

$$\forall n \geq 2, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

Exercice 4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \prod_{k=0}^{n} (2k+1)! \geq \left[(n+1)!\right]^{n+1}.$$

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

Exercice 6. 1. Montrer que $\displaystyle\binom{n-p}{k-p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

2. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}$ et $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

Exercice 7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 8. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k!$

Exercice 9. Résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - ay + z & = & 2 \\ x + (a+1)z & = & 3 \\ x + ay + 3z & = & 4 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.