Colles de la semaine du 30 avril au 4 mai 2018 – MPSI 4

Cours 1 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une sous-famille de $\mathcal{G}$. Il existe une base B de E telle que $\mathcal{L} \subset B \subset \mathcal{G}$.

Cours 2 Un sous-espace F d'un espace vectoriel E de dimension finie est encore de dimension finie.

Cours 3 Relation de Grassman : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Cours 4 Toute supplémentaire du noyau d'une application linéaire entre deux espaces de dimension finie est isomorphe à l'image.

Cours 5 Tout sous-espace vectoriel de codimension m peut s'écrire comme l'intersection de m hyperplans.

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces de E. Monter que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim F_i > n(k-1)$ alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} F_i \neq \{0\}$.

Exercice 2 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v$ inversible.

Exercice 3 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, A et B deux sous-espaces de E de même dimension r. Montrer que A et B admettent un supplémentaire commun (*ie.* il existe un sous-espace vectoriel S de E tel que $A \oplus S = B \oplus S = E$).

Exercice 4 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g.$$

Montrer que les deux sommes sont directes. Le résultat est-il encore vrai en dimension infinie ?

Exercice 5 Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace de E. Montrer que l'ensemble $\mathcal{G} = \{u \in \mathscr{L}(E,F),\ G \subset \operatorname{Ker} u\}$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(E,F)$ et calculer sa dimension.

Exercice 6 Soient E un espace vectoriel de dimension fini et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$;
2. $f^2 = 0$ et il existe $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $h \circ f + f \circ h = \mathrm{Id}_E$.