Colles de la semaine du 2 au 6 octobre 2017

Cours 1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.

Cours 2. Donner la définition des polynômes de Tchebychev de 1$^{\text{re}}$ et 2$^{\text{nde}}$ espèces et donner leur expression.

Cours 3. Calculer, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^3$, $n \in \mathbb{N}$, la somme $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(ak+b)$.

Cours 4. Résoudre l'inéquation $\cos x + \sqrt{3} \sin x \geq \sqrt{2}$.

Cours 5. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Factoriser $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$

Exercice 1. 1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2$, $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{x}y) + |y|^2$.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Déterminer $\left\{ z \in \mathbb{C}, \left| \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \leq 1 \right\}$.

Exercice 2. Montrer que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{U}^3$, $|a+b+c| = |bc+ac+ab|$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 4. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer l'implication

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0.$$

Indication : commencer par montrer l'implication pour $x = 0$.

Exercice 5. Soit $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$. Déterminer la forme trigonométrique de

$$z = \frac{1 + \cos\theta + i \sin\theta}{\sqrt{1 + \sin 2\theta} + i\sqrt{1 - \sin 2\theta}}.$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \qquad \text{et} \qquad U_n = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k.$$