

## Colles de la semaine du 9 au 13 octobre 2017

**Cours 1.** Déterminer les racines deuxièmes de  $z = 1 + 3i$ .

**Cours 2.** Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  avec  $a \neq 0$ . Résoudre l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

**Cours 3.** Décrire l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

**Cours 4.** Montrer que  $\mathbb{U}_n$  est de cardinal  $n$ .

**Cours 5.** Pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ , décrire l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de  $\alpha$ .

**Cours 6.** Soient  $(A, B) \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})^2$ . Montrer que  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ .

**Exercice 1.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = -16\bar{z}^7$ .

**Exercice 2.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer les racines quatrièmes de

$$z = 8a^2 - (1 + a^2)^2 + 4ia(1 - a^2).$$

**Exercice 3.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$ .

**Exercice 4.** Que dire du triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation

$$z^3 - (2 + 4i)z^2 + (-4 + 5i)z + 3 + i = 0?$$

**Exercice 5.** Calculer  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

**Exercice 6.** Soit  $n \geq 3$ . Calculer, pour  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $S_p = \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta^p$ . Calculer  $T = \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \zeta}$ .

**Exercice 7.** Montrer qu'il existe un polynôme  $P(X, Y, Z)$  à coefficients réels tel que, pour  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  et  $A, B, C$  les points du plan complexe d'affixes respectives  $a, b, c$ ,  $P(a, b, c) = 0$  si et seulement si le triangle  $ABC$  équilatéral.