# Colles de la semaine du 16 au 20 octobre 2017

**Premières questions.**

**Cours 1.1** Si $A, B$ sont des parties majorées de $\mathbb{R}$, montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

**Cours 1.2** Énoncer et démontrer la propriété d'Archimède sur $\mathbb{R}$.

**Cours 1.3** Démontrer l'existence et l'unicité de la partie entière d'un réel.

**Cours 1.4** Démontrer que la fonction $x \mapsto x - E(x)$ est 1-périodique et tracer le graphe de cette fonction. Montrer que la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.

**Cours 1.5** Démontrer que les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

**Cours 6.** Soient $a < b$ deux réels. Montrer qu'il existe une infinité de rationnels dans $]a, b[$.

**Deuxièmes questions.**

**Cours 2.1** Énoncer la définition d'une fonction paire, faire un dessin, donner un exemple et un contre-exemple.

**Cours 2.2** Énoncer la définition du fait qu'une fonction a un maximum global, faire un dessin, donner un exemple et un contre-exemple.

**Cours 2.3** Énoncer la définition de la monotonie d'une fonction, faire un dessin, donner un exemple et un contre-exemple.

**Cours 2.4** Énoncer la définition du fait qu'une fonction est lipschitzienne, faire un dessin, donner un exemple et un contre-exemple.

**Cours 2.5** Énoncer la définition du fait qu'une fonction est injective, faire un dessin, donner un exemple et un contre-exemple.

**Cours 2.6** Énoncer la définition du fait qu'une fonction est surjective, faire un dessin, donner un exemple et un contre-exemple.

**Exercices**

**Exercice 1** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1}{2^n} \qquad \text{ou} \qquad \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \leq \frac{1}{2^n}.$$

**Exercice 2** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} E(\sqrt{k})$.

**Exercice 3** Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux suites monotones de réels. Comparer

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \qquad \text{à} \qquad \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right).$$

**Exercice 4** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in [-1,1]^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Montrer que $|x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n| \leq E\left(\dfrac{n^2}{4}\right)$.

**Exercice 5** Soient $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left|\max\limits_{i=1}^{n} x_i - \max\limits_{i=1}^{n} y_i\right| \leq \max\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

**Exercice 6** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $E(2x) = E(x) + E\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right)$.

**Exercice 7** On définit $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2 + 2x}$. Étudier $f$.

**Exercice 8** On définit $f(x) = \dfrac{3(x-1)^3}{3x^2 + 1}$. Étudier $f$.