Colles de la semaine du 4 au 8 décembre 2017

Cours 1.1 Que dire d'une composée d'injections.

Cours 1.2 Soit $f : E \to F$ une application bijective. Montrer l'existence et l'unicité de l'application réciproque.

Cours 1.3 Soient E et F deux ensembles finis. Il existe une injection de E dans F si, et seulement si $|E| \leq |F|$.

Cours 1.4 Soient E et F deux ensembles finis tels que $|E| = |F|$ et $f : E \to F$. f est injective si, et seulement si, elle est bijective si, et seulement si, elle est surjective.

Cours 1.5 Soient E et F deux ensembles finis. $|F^E| = |F|^{|E|}$.

Cours 1.6 Soit E un ensemble fini. $|\mathfrak{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Cours 2.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Montrer que la limite est unique.

Cours 2.2 Soit $(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Montrer que u est bornée.

Cours 2.3 Limite d'une somme de suites convergentes.

Cours 2.4 Limite d'un produit de suites convergentes.

Cours 2.5 Soient u et v deux suites convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors on peut passer à la limite dans l'inégalité.

Cours 2.6 Théorème d'encadrement.

Exercice 1. Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f(k) = 2k \qquad \text{et} \qquad g(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \dfrac{k-1}{2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f, g, $g \circ f$, $f \circ g$.

Exercice 2. Étudier la bijectivité de $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$

Exercice 3. Soit $f : E \to I$ une application surjective. Pour $i \in I$, on pose $A_i = f^{-1}(\{i\})$. Montrer que les A_i forment une partition de E.

Exercice 4. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} + ae^{int} \end{array}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ pour que f soit injective.

Exercice 5. Soient E un ensemble fini et $A, B \in \mathfrak{P}(E)$. On note $A\Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Montrer que

$$|A\Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

Exercice 6. Soient E, F des ensembles, $f : E \to F$ une application.

(i) Montrer que f est injective si, et seulement si, $\forall A \in \mathfrak{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) = A$.

(ii) Montrer que f est surjective si, et seulement si, $\forall B \in \mathfrak{P}(E),\ f(f^{-1}(B)) = B$.