David Michel
david.michel@ens-rennes.fr
perso.eleves.ens-rennes.fr/people/David.Michel

Devoir surveillé 2 – Corrigé

Exercice 1 (2+2)

1. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$ donc il suffit de trouver un n tel que $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$. On écrit donc

```
n=0
while exp(-sqrt(n))>10^(-4)
   n=n+1
end
disp(n)
```

2. Le script ci-dessus affiche le premier entier n tel que $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire tel que $n \geq (4\ln 10)^2$. Comme ceci est environ égal à $(4 \times 2,3)^2 = (9,2)^2 > 9^2 = 81$, parmi les trois valeurs proposées par l'énoncé, seule $n = 85$ est possible.

Exercice 2 (3+2)

1. Il faut savoir le faire !

```
function s = Somme(n)
   s=0
   for k=1:n
      s=s+exp(-k)/(k^3)
   end
endfunction
```

2. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S - S_n| \leq \dfrac{1}{(e-1)e^n}$ donc il suffit de trouver n tel que $\dfrac{1}{(e-1)e^n} \leq 10^{-4}$. On va présenter deux approches.

⋆ On peut procéder comme dans l'exercice 1 et afficher S_n :

```
n=0
while 1/((%e-1)e^n)>10^-4
   n=n+1
end
disp(Somme(n))
```

⋆ Sinon, comme

$$\frac{1}{(e-1)e^x} \leq 10^{-4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geq 4\ln(10) - \ln(e-1)$$

on peut prendre pour n le premier entier supérieur à $4\ln(10) - \ln(e-1)$, c'est-à-dire la partie entière supérieure, représentée en Scilab par **ceil**. On peut donc écrire

```
n=ceil(4*log(10)-log(exp(1)-1))
disp(Somme(n))
```

Si l'on ne connait pas cette fonction, on n'est pas obligé de donner le *premier* entier supérieur à $4\ln(10) - \ln(e-1)$. Comme $e - 1 \geq 1$, on a $\ln(e-1) \geq \ln(1) = 0$ donc $4\ln(10) - \ln(e-1) \geq 4\ln(10) \approx 9,2$. On peut donc prendre $n = 10$ et on sera assuré que $|S - S_{10}| \leq 10^{-4}$:

```
disp(Somme(10))
```

Le premier entier tel que $\dfrac{1}{(e-1)e^n} \leq 10^{-4}$ est 9, mais le premier entier n tel que $|S - S_n| \leq 10^{-4}$ est $n = 3$. Donc l'instruction **disp(Somme(4*log(10)-log(%e-1)))** aurait affiché S_8 (puisque $8 < 4\ln 10 - \ln(e-1) < 9$) et le résultat aurait encore été une valeur approchée à 10^{-4} près de S.

Attention : erreur fréquente On ne peut pas dire qu'on aura trouvé une valeur approchée de S à partir du moment où $\dfrac{e^{-n}}{n^3} < 10^{-4}$. Considérer, pour se convaincre les deux exemples suivants :

- $u_n = \dfrac{1}{n}$. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ mais $u_n < 10^{-4}$ $\forall n > 10^4$. La somme S_{10^4} n'est pas une approximation de $+\infty$ à 10^{-4} près...
- Le raisonnement est également faux pour une série convergente. Si $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, on peut montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Or $\dfrac{1}{n^2} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow n \geq 100$. Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2} \approx 1,6350$ alors que $\dfrac{\pi^2}{6} > 1,6449$ donc $\dfrac{\pi^2}{6} - S_{100} > 10^{-4}$.

Exercice 3 (2+1) On remarque que pour $1 \leq i, j \leq n$, on a $a_{ij} = i^{j-1}$.

```
A=zeros(n,n)
for i=1:n
   for j=1:n
      A(i,j)=i^(j-1)
   end
end
```

Ensuite, il suffit de mettre au carré chaque coefficient : $b_{ij} = a_{ij}^2$, $\forall i, j$.

```
B=A.^2
```

Exercice 4 (2+3)

1. Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tA$ a pour coefficients $\forall i, j$ $({}^tA)_{ij} = a_{ji}$. On peut donc écrire :

```
function B=Transposee(A)
   [n,p]=size(A)
   B=zeros(n,n)
   for i=1:n
      for j=1:n
         B(i,j)=A(j,i)
      end
   end
endfunction
```

2. Comme on l'a vu en TP, on peut écrire

```
function B=Echange(A,i,k)
   B=A
   B(:,i)=A(:,k)
   B(:,k)=A(:,i)
endfunction
```