David Michel
david.michel@ens-rennes.fr
perso.eleves.ens-rennes.fr/people/David.Michel

ECE 1
Lycée Saint-Vincent
2016-2017

TP10 : Probabilités – suite

Dans le TP précédent, on a simulé quelques lois usuelles. La fonction **grand()** simule la plupart des lois d'utilisation courante. On tapera **help grand** dans la console Scilab pour avoir la description complète de la fonction. Donnons deux exemples.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{grand(m,n,'bin',N,p)}$$

affecte à $\mathbf{Y}$ une matrice de taille $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi binomiale de paramètres (N, p). Les coefficients $\mathbf{Y}(i, j)$ sont donc des réalisations de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{B}(N, p)$. Ces variables sont indépendantes.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{grand(m,n,'nor',mean,S)}$$

affecte à $\mathbf{Y}$ une matrice de taille $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi normale d'espérance **mean** et de variance $\mathbf{S}^2$ (attention, $\mathbf{S}$ est l'écart-type, *standard deviation*). Les coefficients sont indépendants.

$\boxed{\text{Q.1}}$ On va illustrer la notion de convergence en probabilité qui apparaît dans la loi faible des grands nombres.

On dispose d'une urne contenant une proportion p de boules noires et une proportion $q = 1 - p$ de boules blanches. L'expérience consiste à tirer n boules avec remise. On définit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires telles que $X_i = 0$ si la i-ième boule tirée est blanche et $X_i = 1$ si la i-ième boule tirée est noire. On définit également

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

qui est une variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées au cours de l'expérience.

a. Identifier la loi (commune) des X_i. Donner l'espérance commune $\mathbb{E}(X_1)$ des X_i. Identifier la loi de S_n.

On suppose que les tirages effectués sont indépendants. La loi faible des grands nombres affirme alors que la variable aléatoire $Y_n = \frac{S_n}{n}$ vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}(X_1)| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

b. Écrire un programme qui :
- lit des nombres n, N, ε ;
- construit, en utilisant la fonction **grand()**, un vecteur ligne **S** de longueur **N** dont chaque coefficient est une valeur prise par une réalisation de S_n ;
- construit un vecteur ligne $\mathbf{Z} = [z_0, z_1, \dots, z_n]$ tel que z_k est la fréquence avec laquelle les variables S_n ont pris la valeur k au cours des N expériences ;
- représente une barre verticale de hauteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$, centrée au point d'abscisse p et de largeur 2ε, puis représente, sur la même figure, au moyen d'un diagramme en barres, les nombres z_k en fonction de $\frac{k}{n}$ (valeurs prises par Y_n).

Tester ce programme avec $N = 10^4$, $n = 50$, $p = 0.3$, $\varepsilon = 0.1$.

$\boxed{\text{Q.2}}$ Écrire un programme qui, lorsqu'on entre les valeurs de $N = 10^4$, $p = 0.3$ et $\varepsilon = 0.1$, renvoie la première valeur de n telle que notre approximation de $\mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(X_1)| \geq \varepsilon)$ soit inférieure à 10^{-4}.