Automorphismes de $k(X)$

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 1*, 3e édition, Cassini. Exercice 5.54 page 244

Non utilisé

Théorème 1

Soient k un corps et $\mathrm{Aut}_k(k(X))$ le groupe des automorphismes de la k-algèbre $k(X)$. Montrons que

$$\mathrm{Aut}_k(k(X)) = \left\{F \in k(X) \mapsto F\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right),\ (a,b,c,d) \in k^4,\ ad-bc \neq 0\right\}.$$

$\triangleright$ • $\star$ Soit $\Phi : k(X) \to k(X)$ un endomorphisme d'algèbres. Notons $F = \Phi(X)$. Pour $P \in k[X]$, avec $P = \sum_{i=0}^{d} p_i X^i$, on a :

$$\Phi(P) = \sum_{i=0}^{d} p_i \Phi(X^i) = \sum_{i=0}^{d} p_i F^i = P \circ F.$$

Soit $G = \dfrac{P}{Q}$ avec $P, Q \in k[X]$. Alors $\Phi(P) = \Phi(QG) = \Phi(Q)\Phi(G)$ donc

$$\Phi(G) = \frac{\Phi(P)}{\Phi(Q)} = \frac{P \circ F}{Q \circ F} = G \circ F.$$

$\star$ Réciproquement, pour tout $F \in k(X)$, l'application

$$\Phi_F : \begin{array}{ccc} k(X) & \to & k(X) \\ G & \mapsto & G \circ F \end{array}$$

est bien un morphisme de k-algèbres.

• Déterminons une condition nécessaire et suffisante pour que Φ_F soit un automorphisme.

$\star$ Supposons que Φ_F est un automorphisme. Alors il est surjectif et en particulier il existe $G \in k(X)$ tel que $\Phi(G) = G \circ F = X$. Soient $A, B, P, Q \in k[X]$ tels que $A \wedge B = 1 = P \wedge Q$ et $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{P}{Q}$. De tels polynômes existent car $F, G \neq 0$. Notons

$$P = \sum_{i=1}^{d_p} p_i X^i \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{i=1}^{d_q} q_i X^i$$

avec $d_p = \deg(P)$ et $d_q = \deg(Q)$. Alors, l'hypothèse $P \circ F = X \times (Q \circ F)$ se réécrit

$$\sum_{i=0}^{d_p} p_i F^i = X \sum_{i=0}^{d_q} q_i F^i$$

soit, en multipliant par B^m, avec $m = \max(d_p, d_q)$,

$$\sum_{i=0}^{d_p} p_i A^i B^{m-i} = X \sum_{i=0}^{d_q} q_i A^i B^{m-i}. \tag{1}$$

$\star$ Montrons que $\deg(A) \leq 1$. En effet, d'après l'égalité précédente, $A | (p_0 - q_0 X) B^m$ donc, comme $A \wedge B = 1$, d'après le théorème de Gauss, $A | p_0 - q_0 X$. De plus, $(p_0, q_0) \neq 0$ car sinon $X | P$ et $X | Q$, donc $\deg(A) \leq 1$.

$\star$ Montrons que $\deg(B) \leq 1$.

– Si $m = d_p = d_q$, alors, d'après $(*)$, $B | (p_m - q_m X) A^m$ donc, $B | (p_m - q_m X)$. Comme $p_m, q_m \neq 0$, on en déduit le résultat.

– Si $m = d_p > d_q$, alors, d'après $(*)$, $B | p_m Apm$, d'où $B | p_m \neq 0$.

– Si $m = d_q > d_p$, alors, d'après $(*)$, $B | q_m X B^m$, d'où $B | q_m X$.

Dans tous les cas, $\deg(B) \leq 1$.

$\star$ Ainsi, il existe $(a,b,c,d) \in k^4$ tel que
$$F = \frac{aX+b}{cX+D}.$$
Comme Φ_F est surjective, F n'est pas constante donc $ad - bc \neq 0$.

$\star$ Réciproquement, pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k)$, notons
$$\Phi_M : \begin{array}{rcl} k(X) & \to & k(X) \\ G & \mapsto & G\left(\dfrac{aX+b}{cX+d}\right) \end{array}$$
et montrons que Φ_M est un automorphisme. Pour $M, N \in \mathrm{GL}_2(k)$, on a :
$$\Phi_M \circ \Phi_N = \Phi_{NM}$$
donc Φ_M est un automorphisme (d'inverse $\Phi_{M^{-1}}$).

- On a montré que
$$\Psi : \begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_2(k) & \to & \mathrm{Aut}_k(k(X)) \\ M & \mapsto & \Phi_{M^{-1}} \end{array}$$
est un morphisme de groupes surjectif. Comme $\operatorname{Ker} \Psi = k^\times I_2$, d'après le théorème d'isomorphisme,
$$\mathrm{Aut}_k(k(X)) \simeq \mathrm{GL}_2(k) / k^\times I_2 = \mathrm{PGL}_2(k)$$
donc les automorphismes de $k(X)$ sont les homographies. $\square$