Étude de $O(p,q)$

P. Caldero, J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome premier*, Calvage & Mounet. Proposition A.2 page 211.

Recasage : 156, 158, 170, 171.

Théorème 1

Soient $p, q \neq 0$. On a un homéomorphisme

$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

$\triangleright$ – *Étape 1 : Application de la décomposition polaire.* Soit $M \in O(p,q)$. Soit $(O,S) \in O(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ $(n = p+q)$ la décomposition polaire de M. Montrons que $O, S \in O(p,q)$.
Posons $T = {}^tMM = S^2$. Comme $M \in O(p,q)$, on a $MI_{p,q}{}^tM = I_{p,q}$ donc ${}^tM^{-1}I_{p,q}M^{-1} = I_{p,q}$ d'où ${}^tM^{-1} \in O(p,q)$. On en déduit que ${}^tM \in O(p,q)$. Ainsi, $S^2 = T \in O(p,q)$. Comme $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ réalise un homémorphisme, il existe $U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $T = \exp(U)$. Alors,

$$\begin{aligned}
T \in O(p,q) \quad & \Longleftrightarrow \quad TI_{p,q}{}^tT = I_{p,q} \\
& \Longleftrightarrow \quad {}^tT = I_{p,q}^{-1}T^{-1}I_{p,q} \\
& \Longleftrightarrow \quad {}^t\exp(U) = I_{p,q}^{-1}\exp(-U)I_{p,q} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exp\left({}^tU\right) = \exp\left(-I_{p,q}^{-1}UI_{p,q}\right) \\
& \underset{\exp \text{ bijective}}{\Longleftrightarrow} \quad U = {}^tU = -I_{p,q}^{-1}UI_{p,q} \\
& \Longleftrightarrow \quad UI_{p,q} + I_{p,q}U = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{U}{2}I_{p,q} + I_{p,q}\frac{U}{2} = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad {}^t\exp\left(\frac{U}{2}\right) = I_{p,q}^{-1}\exp\left(\frac{U}{2}\right)I_{p,q}
\end{aligned}$$

d'où $\exp\left(\frac{U}{2}\right) \in O(p,q)$. Or $\exp\left(\frac{U}{2}\right) \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ et $\exp\left(\frac{U}{2}\right)^2 = T$ donc, par unicité de la racine carrée dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, on a $S = \exp\left(\frac{U}{2}\right) \in O(p,q)$. On en déduit que $O \in O(p,q)$.

Ainsi, la décomposition polaire induit l'homéomorphisme

$$O(p,q) \simeq (O(n) \cap O(p,q)) \times (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cap O(p,q)).$$

– *Étape 2 : Étude de $O(n) \cap O(p,q)$.* Soit $O \in O(n) \cap O(p,q)$. Écrivons $O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q,p+q}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
O \in O(n) \cap O(p,q) \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} {}^tAA - {}^tBB = I_p \\ {}^tAC - {}^tBD = 0 \\ {}^tCA - {}^tDB = 0 \\ {}^tCC - {}^tDD = -I_q \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} {}^tAA + {}^tBB = I_p \\ {}^tAC + {}^tBD = 0 \\ {}^tCA + {}^tDB = 0 \\ {}^tCC + {}^tDD = I_q \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} B = C = 0 \\ A \in O(p) \\ D \in O(q) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, $O(n) \cap O(p,q) = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in O(p), D \in O(q)\right\} \simeq O(p) \times O(q)$.

– *Étape 3 : Étude de* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap O(p,q)$. Posons

$$L = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ MI_{p,q} + I_{p,q}M = 0\}.$$

On a vu précédemment que exp réalise un homéomorphisme $L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq O(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $S \in L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $S = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix}$. Alors

$$SI_{p,q} + I_{p,q}S = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = D = 0$$

donc $L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix},\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathbb{R}^{pq}$.

– *Conclusion.* On a montré que

$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

□