Inversion de la fonction caractéristique

B. Candelpergher, *Théorie des probabilités*, Calvage & Mounet. Page 222.

Recasage : 235, 239, 261.

Théorème 1

La fonction caractéristique caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle.

▷ Soit X une variable aléatoire réelle. On va montrer que la fonction de répartition $F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$ s'exprime en fonction de $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.

– On commence par exprimer $\mathbb{P}(X \in]a, b[) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]a,b[} \mathrm{d}\mathbb{P}_X$ pour $a < b$. L'idée est de remplacer $\mathbf{1}_{]a,b[}$ par une expression faisant intervenir $e^{i\cdot t}$.

Lemme 2

Soient $T > 0$ et

$$K_T : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} e^{ixt} \mathrm{d}t.$$

On a :

(i) K_T est uniformément bornée en T,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $K_T(x) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \mathbf{1}_{]a,b[}(x) + \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{\{a\}}(x) + \mathbf{1}_{\{b\}}(x))$,

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} K_T \mathrm{d}\mathbb{P}_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t) \mathrm{d}t$.

▷ On a :

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{i(x-a)t}}{it} \mathrm{d}t = \int_0^T \frac{e^{i(x-a)t} - e^{-i(x-a)t}}{it} \mathrm{d}t = 2 \int_0^{T(x-a)} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad K_T = \frac{1}{\pi} \left(\mathrm{Si}(T(x-a)) - \mathrm{Si}(T(x-b)) \right)$$

où $\mathrm{Si} : y \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^y \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u$. Or Si est impaire et continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\displaystyle\lim_{y \to \pm\infty} \mathrm{Si}(y) = \pm\frac{\pi}{2} < \infty$ donc Si est bornée sur $\mathbb{R}$. On en déduit que K_T est uniformément bornée.

(ii) De plus, si $x \in]a, b[$, $\mathrm{Si}(T(x-a)) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{Si}(T(x-b)) \xrightarrow[T \to +\infty]{} -\frac{\pi}{2}$ donc $K_T(x) \xrightarrow[T \to +\infty]{} 1$. On établit de même que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad K_T(x) = \mathbf{1}_{]a,b[}(x) + \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{\{a\}}(x) + \mathbf{1}_{\{b\}}(x)).$$

(iii) D'après le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}} K_T \mathrm{d}\mathbb{P}_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t) \mathrm{d}t.$$

Le théorème de Fubini s'applique car

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} \frac{|e^{-iat} - e^{ibt}|}{t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\mathbb{P}_X = \int_{-T}^{T} \frac{\sqrt{(\cos at - \cos bt)^2 + (\sin at - \sin bt)^2}}{|t|} \mathrm{d}t < +\infty$$

d'après la règle de Riemann puisque

$$\sqrt{|t|} \times \frac{\sqrt{(\cos at - \cos bt)^2 + (\sin at - \sin bt)^2}}{|t|} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{(b-a)|t|}{\sqrt{|t|}} \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$

□

On déduit du lemme que

$$\mathbb{P}(X \in]a, b[) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]a,b[} \mathrm{d}\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{T \to +\infty} K_T \right) \mathrm{d}\mathbb{P}_X - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (\mathbf{1}_{\{a\}} + \mathbf{1}_{\{b\}}) \mathrm{d}\mathbb{P}_X$$

d'où, par le théorème de convergence dominée (K_T étant uniformément bornée et $\mathbb{P}_X$ est de masse finie) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in]a,b[) &= \lim_{T\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} K_T \mathrm{d}\mathbb{P}_X - \frac{\mathbb{P}(X=a)+\mathbb{P}(X=b)}{2} \\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t)\mathrm{d}t - \frac{\mathbb{P}(X=a)+\mathbb{P}(X=b)}{2}.\end{aligned}$$

Comme $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(X \in]a,b[) + \mathbb{P}(X=b)$, on en déduit :

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t)\mathrm{d}t - \frac{\mathbb{P}(X=a)-\mathbb{P}(X=b)}{2}$$

et, en particulier, si a et b ne sont pas des points de discontinuité de F_X :

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t)\mathrm{d}t.$$

F_X étant une fonction croissante, ses points de discontinuité forment un ensemble D dénombrable. De plus, on a :

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ a\notin D}} (F_X(b) - F_X(a)) = F_X(b)$$

donc, pour tout $b \notin D$,

$$F_X(b) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ a\notin D}} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t)\mathrm{d}t.$$

Enfin, comme la fonction F_X est continue à droite, la relation ci-dessus détermine F_X sur $\mathbb{R}$. □