Formule des compléments

E. Amar, E. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini. Paragraphe 8.4.4 page 249.

Recasage : 236, 245

Théorème 1

$$\forall 0 < Re(z) < 1, \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

$\triangleright$ – D'après le théorème des zéros isolés, il suffit de montrer le résultat pour $z = \alpha \in]0,1[$. Soit $\alpha \in]0,1[$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} t^{\alpha-1}s^{-\alpha}e^{-s-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} e^{-(s+t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Considérons $\varphi : (s,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto (u,v) = \left(s+t, \dfrac{s}{t}\right)$. φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sur lui-même et, si $(\mathbb{R}_+^*)^2 \ni (s,t) = \varphi^{-1}(u,v)$,

$$|\det(D\varphi(s,t))| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & \frac{-s}{t^2} \end{vmatrix} = \frac{s}{t^2} + \frac{1}{t} = \frac{v+1}{t}$$

donc

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \frac{e^{-u}}{v^{\alpha}(1+v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\mathrm{d}v}{v^{\alpha}(1+v)} := I_{\alpha}.$$

– Soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ et on considère la détermination de l'argument associée à valeurs dans $]0,2\pi[$. On pose alors

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^{\alpha}(1+z)} = \frac{1}{r^{\alpha}e^{i\alpha\theta}(1+re^{i\theta})} \text{ si } z = re^{i\theta},\ \theta \in]0,2\pi[.$$

f est holomorphe dans $\Omega\backslash\{-1\}$ et a un pôle simple en -1 avec

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{1}{(-1)^{\alpha}} = e^{-i\pi\alpha}.$$

– Pour $R > 1$, on définit le chemin $\gamma_R = \mathscr{C}_R \cup I_R^+ \cup \Gamma_R \cup I_R^-$ où

$\star$ $\mathscr{C}_R = \left\{\dfrac{1}{R}e^{i\theta},\ \theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]\right\}$

$\star$ $I_R^{\pm} = \left\{t \pm \dfrac{i}{R},\ t \in \left[0, \sqrt{R^2 - \dfrac{1}{R^2}}\right]\right\}$

$\star$ $\Gamma_R = \{Re^{i\theta},\ \theta \in [\theta_R, 2\pi - \theta_R]\}$ où $\theta_R = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\frac{1}{R}}{\sqrt{R^2 - \frac{1}{R^2}}}\right)$.

D'après le théorème des résidus

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

Faisons tendre $R \to +\infty$.

$\star$ Sur $\mathscr{C}_R$:

$$\left|\int_{\mathscr{C}_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \frac{1}{\frac{1}{R^{\alpha}}(1-\frac{1}{R})} \times \frac{\pi}{R} = \frac{\pi}{R^{1-\alpha}(1-\frac{1}{R})} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

$\star$ Sur I_R^+. On a, pour $t > 0$,

$$\left(t + \frac{i}{R}\right)^{\alpha} = \left(t^2 + \frac{1}{R^2}\right)^{\alpha/2} \exp\left(i\alpha\mathrm{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{R}}{t}\right)\right) \xrightarrow[R\to+\infty]{} t^{\alpha}$$

donc :

– $\mathbf{1}_{]0,\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}[}(t) f\left(t + \dfrac{i}{R}\right) \xrightarrow[R\to+\infty]{} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)f(t)$ mesurable,

$$- \left| \mathbf{1}_{]0,\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}[}(t) f\left(t+\frac{i}{R}\right) \right| \leq \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) f(t) \in L^1(\mathbb{R})$$

donc d'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{I_R^+} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(t)\mathrm{d}t$.

$\star$ Sur I_R^-. De même, pour $t > 0$,

$$\left(t \pm \frac{i}{R}\right)^\alpha = \left(t^2 + \frac{1}{R^2}\right)^{\alpha/2} \exp\left(i\alpha\left(2\pi - \mathrm{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{R}}{t}\right)\right)\right) \xrightarrow[R\to+\infty]{} t^\alpha e^{2i\pi\alpha}$$

et, comme précédemment, par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{I_R^-} f(z)\mathrm{d}z = e^{-2i\pi\alpha} \int_{\mathbb{R}_+^*} f(t)\mathrm{d}t$.

$\star$ Sur $\Gamma_{\varepsilon,R}$. On a :

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq L(\Gamma_R) \max_{z\in\Gamma_R} \frac{1}{|z|^\alpha |1+z|} \leq \frac{2\pi R}{R^\alpha(R-1)} = \frac{2\pi R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, à la limite $R \to +\infty$, on obtient :

$$(1 + e^{-2i\pi\alpha}) I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

soit

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

$\square$