Formule sommatoire de Poisson

X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, 2[e] édition, Ellipses. Problème 4 page 272.

Recasage : 236, 241, 246.

Théorème 1 (*Formule sommatoire de Poisson*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = \underset{|x|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ et $f'(x) = \underset{|x|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ pour $\alpha, \beta > 1$. Alors la série de fonctions de terme général $(f(\cdot + n))_{n\in\mathbb{Z}}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx}$$

où, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\xi t} dt$.

$\triangleright$ – Montrons que la série de terme général $(f(\cdot + n))_{n\in\mathbb{Z}}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. Soit $M > 0$ tel que pour tout $|x| \geq 1$, $|f(x)| \leq \dfrac{M}{|x|^\alpha}$. Alors, pour $R > 0$, par l'inégalité triangulaire,

$$\forall x \in [-R, R], \forall |n| > R+1, \qquad |f(x+n)| \leq \frac{M}{|x+n|^\alpha} \leq \frac{M}{||n| - R|^\alpha},$$

qui est le terme général, indépendant de x, d'une série convergente, d'où le résultat.

On en déduit en particulier que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$. Notons F sa somme.

– De même, la série de terme général $(f'(\cdot + n))_{n\in\mathbb{Z}}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. Alors, d'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

– Par ailleurs, F est 1-périodique. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$$

d'où, à la limite $N \to +\infty$, $F(x+1) = F(x)$.

Calculons les coefficients de Fourier de F : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \int_0^1 F(t) e^{2i\pi nt} \mathrm{d}t \underset{\text{cvu}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+k) e^{2i\pi nt} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(t) e^{2i\pi nt} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2i\pi nt} \mathrm{d}t = \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

car $f(x) = \underset{|x|\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

– Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$, sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx}.$$

$\square$

Proposition 2

Soit $\theta : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$. θ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

▷ Soit $\alpha > 0$. On applique la formule sommatoire de Poisson à $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\alpha x^2}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \widehat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi n t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-2i\pi \frac{n}{\sqrt{\alpha}} u} \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} I\left(\frac{n}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

où l'on a défini $I : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-2i\pi x u} \mathrm{d}u$. Cherchons une équation différentielle satisfaite par I.

– I est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet,
  - ⋆ $\forall x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R} \mapsto e^{-u^2} e^{-2i\pi x u} \in L^1_u(\mathbb{R})$ car $e^{-u^2} \in L^1_u(\mathbb{R})$,
  - ⋆ $\forall u \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-u^2} e^{-2i\pi x u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,
  - ⋆ $\forall (u,x) \in \mathbb{R}^2$, $\left| e^{-u^2} e^{-2i\pi x u} \right| \leq e^{-u^2} \in L^1_u(\mathbb{R})$ indépendant de x,

  donc d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad I'(x) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} e^{-2i\pi x u} \mathrm{d}u$$

– Or, par intégration par parties, pour tout $x \neq 0$,

$$I(x) = \left[e^{-u^2} \frac{e^{-2i\pi u x}}{-2i\pi x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2i\pi x} \int_{-\infty}^{+\infty} 2u e^{-u^2} e^{-2i\pi u x} \mathrm{d}u = \frac{1}{2i\pi x} \frac{1}{i\pi} I'(x)$$

donc, comme $I'(0) = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad I'(x) = -2\pi^2 x I(x).$$

On en déduit, comme $I(0) = \sqrt{\pi}$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad I(x) = I(0) e^{-\pi^2 x^2} = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}.$$

– Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$. D'après la formule de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(x+n)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}} e^{2i\pi n x}$$

donc, en $x = 0$ et avec $\alpha = \pi t$,

$$\forall t > 0, \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}$$

ie.

$$\forall t > 0, \qquad \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

□