Modèle de Galton-Watson

Recasage : 223, 226, 260, 264.

Soit X une variable aléatoire discrète intégrable. On note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $m = \mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$.
Soient $(X_{i,n})_{i,n}$ des variables aléatoires iid de loi $\mathbb{P}_X$. On pose $Z_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}.$$

Z_n représente le nombre d'individus à la n-ième génération. $X_{i,n}$ est le nombre de descendant de l'individu i de la génération n.
On s'intéresse à la probabilité d'extinction $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\, Z_n = 0)$.

Lemme 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, $Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$.

▷ Par récurrence, car Z_n dépend de Z_{n-1} et $X_{i,n-1}$. □

– On note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et

$$\pi_\infty = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\, Z_n = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\uparrow \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \pi_n.$$

– Si $p_0 = 0$, alors $\forall n$, $Z_n \geq 1$ ps et donc $\pi_\infty = 0$.
– Si $p_0 = 1$, alors $\forall n$, $Z_n = 0$ ps et $\pi_\infty = 1$.
– On suppose désormais que $p_0 \in]0,1[$. On définit la série génératrice des moments de X par

$$G(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

Proposition 2

(i) G est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
(ii) G est strictement croissante sur $]0,1[$.
(iii) G est convexe sur $]0,1[$.
(iv) G est strictement convexe sur $]0,1[$ si et seulement si $p_0 + p_1 < 1$.

▷ (i) Pour tout $k \geq 0$, $s \mapsto p_k s^k$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, la série $\sum_{k\geq 0} p_k$ converge, la série $\sum_{k\geq 0} p_k s^k$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$. On en déduit que G est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

G est la somme d'une série entière sur $[0,1[$ donc $G'(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp_k s^{k-1}$ et $G''(s) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)s^{k-2}$. Soit $k_0 > 0$ tel que $p_{k_0} > 0$.
(ii) $G'(s) \geq k_0 p_{k_0} s^{k_0-1} > 0$ donc G est strictement croissante sur $]0,1[$.
(iii) $G''(s) \geq k_0(k_0-1)p_{k_0} s^{k_0-2} \geq 0$ donc G est convexe.
(iv) Si $p_0 + p_1 = 1$ alors G est affine et donc pas strictement convexe.
Si $p_0 + p_1 < 1$, il existe $k_0 > 1$ tel que $p_{k_0} > 0$ et comme en (iii), $G''(s) > 0$ et G'' est strictement convexe. □

Pour tout $n \geq 0$, on définit la fonction génératrice des moments de Z_n :

$$G_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)s^k.$$

Proposition 3

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad G_n = \underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{n \text{ fois}}$$

et $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

$\triangleright$ Montrons-le par récurrence. C'est vrai pur $n = 1$ et

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \mathbb{E}[s^{X_{1,n}+\cdots+X_{Z_n,n}}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{Z_n=k\}} \prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}}\right] \underset{\substack{\text{Fubini}\\\text{Tonelli}\\+\perp\!\!\!\perp}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) \prod_{i=1}^{k} \underbrace{\mathbb{E}[s^{X_{i,n}}]}_{\mathbb{E}[s^X]} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) G(s)^k = G_n(G(s)). \end{aligned}$$

Alors,

$$G'_{n+1}(s) = G'(s) G'_n(G(s))$$

donc, en $s = 1$ et par récurrence,

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mathbb{E}[X] G'_n(1) = m^{n+1}$$

$\square$

Proposition 4

π_∞ est le plus petit point fixe de G sur $[0, 1]$.

$\triangleright$ On a $G_{n+1}(s) = G(G_n(s))$ donc, en $s = 0$, $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$. Comme G est continue, on en déduit $\pi_\infty = G(\pi_\infty)$. Soit de plus $u \in [0, 1]$ un point fixe de G. Montrons par récurrence que $\pi_n \leq u$. On a $\pi_1 = G(\pi_0) = G(\mathbb{P}(Z_0 = 0)) = G(0) \leq G(u) = u$ car G est croissante. De plus, si $\pi_n \leq u$, alors, par croissance de G, $\pi_{n+1} = G(\pi_n) \leq G(u) = u$. $\square$

Théorème 5

Si $m \leq 1$ alors $\pi_\infty = 1$. Si $m > 1$ alors π_∞ est l'unique point fixe de G sur $]0, 1[$.

Remarque : $G(1) = 1$ et G a au plus deux points fixes. En effet, si $p_0 + p_1 = 1$, alors G est affine et $G(0) = p_0 > 0$ donc G n'a qu'un seul point fixe.

Si $p_0 + p_1 < 1$ alors G est strictement convexe. Supposons par l'absurde que G a trois points fixes distincts. Alors d'après le théorème de Rolle, $G' - 1$ s'annule en a et b, avec $0 < a < b < 1$. Comme $G' - 1$ est croissante, on en déduit que $G' - 1$ est nulle sur $[a, b]$ ce qui contredit la stricte croissance de $G' - 1$, qui vient de la stricte convexité de G.

$\triangleright$ Notons $h = G - \mathrm{Id}$. (Raisonner sur les tableaux de variations)

Cas $m > 1$. $h'(0) = p_1 - 1 < 0 < m - 1 = h'(1)$ donc, comme h' est continue, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $h'(\alpha) = 0$. Comme h' est croissante, on en déduit que h est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, 1]$. Supposons par l'absurde que h ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Alors, pour tout $x \in [\alpha, 1]$, $0 \leq h(x) \leq h(1) = 0$ donc h est nulle sur $[\alpha, 1]$, ce qui contredit la stricte convexité ($\alpha < 1$). Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $G(y_0) = y_0$. 1 et y_0 sont donc deux points fixes de G. y_0 est donc l'unique point fixe dans $]0, 1[$.

Cas $m < 1$. h' est croissante sur $]0, 1[$et $h'(1) = m - 1 \leq 0$ donc h est décroissante sur $[0, 1]$ et vaut 0 en 1. Comme h ne s'annule qu'au plus deux fois, 1 est le seul point d'annulation de h *ie.* l'unique point fixe de G. $\square$