Groupe simple d'ordre 60

I. Nourdin, *Agrégation de mathématiques épreuve orale*, 2e édition, Dunod. Proposition 2.19.28 page 236.

Recasage : 101, 103, 105, 190.

Théorème 1

Soit G un groupe fini simple d'ordre 60. Alors $G \simeq \mathfrak{A}_5$.

$\triangleright$ L'idée est de trouver un ensemble de cardinal 5 sur lequel on fera agir fidèlement G. On va montrer qu'on peut considérer l'ensemble des 2-Sylow de G.

– *Étape 1 : Premières applications du théorème de Sylow.* On a $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Notons n_p le nombre de p-Sylow de G, pour $p \in \{2, 3, 5\}$. D'après le théorème de Sylow, on a :

$$\begin{cases} n_2 \equiv 1\,[2] \\ n_2 | 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} n_3 \equiv 1\,[3] \\ n_3 | 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} n_5 \equiv 1\,[5] \\ n_5 | 12 \end{cases}$$

On en déduit que $n_5 \in \{1, 6\}$. Si $n_5 = 5$ alors l'unique 5-Sylow de G est distingué, ce qui contredit la simplicité de G. Donc $n_5 = 6$.

De même, on a $n_3 \in \{4, 10\}$. Supposons par l'absurde que $n_3 = 4$. Alors, d'après le théorème de Sylow, G agit transitivement par conjugaison sur l'ensemble des 3-Sylow qui est de cardinal 4 donc il existe un morphisme non trivial $\rho : G \to \mathfrak{S}_4$. Comme $G \neq \mathrm{Ker}\,\rho \lhd G$ et G est simple, on en déduit que ρ est injectif, donc $|G| \leq |\mathfrak{S}_4| = 24$: absurde. Donc $n_3 = 10$.

De même, $n_2 \in \{5, 15\}$.

– *Étape 2 : Montrons que $n_2 = 5$.* Supposons par l'absurde que $n_2 = 15$. Soient $S_1 \neq S_2$ des 2-Sylow (d'ordre 4). Montrons que $S_1 \cap S_2 = \{1\}$. On procède à nouveau par l'absurde en supposant $|S_1 \cap S_2| > 1$. Alors $|S_1 \cap S_2| = 2$ et $S_1 \cap S_2 = \{1, u\}$. Notons $H = \langle S_1, S_2 \rangle$. D'après le théorème de Lagrange, $|H|\,|60$ et $4|\,|H|$. Comme $|H| > 4$, on a donc $|H| \in \{12, 20, 60\}$.

$\star$ Supposons $|H| = 60$, ie $H = G$. Comme S_1 et S_2 sont d'ordre 4, ils sont abéliens donc $S_1 \cup S_2 \subset C_G(u) = \{g \in G,\, gu = ug\}$, le centralisateur de u. Donc $G = \langle S_1 \cup S_2 \rangle \subset C_G(u) \subset G$ donc $u \in Z(G)$. Or $Z(G)$ est un sous-groupe normal de G donc $Z(G) = \{1\}$ ou G. Comme un groupe abélien d'ordre 60 n'est pas simple, on en déduit que $Z(G) = \{1\}$: contradiction.

$\star$ Supposons $|H| = 20$. Alors, d'après le théorème de Sylow, H a un unique 5-Sylow H_5 qui est donc distingué dans H. On en déduit que H est un sous-groupe du normalisateur $N_G(H_5)$. Or, si l'on considère l'action de G par conjugaison sur ses 5-Sylow, on a :

$$n_5 = |\Omega_{H_5}| = [G : N_G(H_5)]$$

d'où

$$|N_G(H_5)| = \frac{|G|}{n_5} = 10 < 20 = |H| \qquad \text{contradiction.}$$

$\star$ Donc $|H| = 12$. Notons n_2' (resp. n_3') le nombre de 2-Sylow (resp 3-Sylow) de H. D'après le théorème de Sylow, on a :

$$\begin{cases} n_2' \equiv 1\,[2] \\ n_2' | 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} n_3' \equiv 1\,[3] \\ n_3' | 4 \end{cases}$$

Or $S_1, S_2 \subset H$ donc $n_2' = 3$. Soit S_3 le troisième 2-Sylow de H. Comme $u \in Z(H)$ et S_1 et S_3 sont conjugués dans H, on a $u \in S_3$. On peut donc conclure qu'il y a $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \backslash \{1\} = 7$ éléments d'ordre 2 ou 4 dans H. Comptons le nombre d'éléments d'ordre 3.

Si $n_3' = 1$, notons H_3 l'unique 3-Sylow de H, qui est donc normal dans H. Alors, comme précédemment, $H \leq N_G(H_3)$ et

$$|N_G(H_3)| = \frac{|G|}{n_3} = 6 < 12 = |H| \qquad \text{contradiction.}$$

Donc $n_3' = 4$. Or, comme les groupes d'ordre 3 sont engendrés par tout élément distinct du neutre, les intersections des 3-Sylow sont réduites à $\{1\}$. On en déduit qu'il y a 8 éléments d'ordre 3 dans H. On a donc trouvé $1 + 7 + 8 = 16 > 12$ éléments dans H : contradiction.

Ainsi, $S_1 \cap S_2 = \{1\}$ donc il y a $3 \times 15 = 45$ éléments d'ordre 2 ou 4. Comme G a 10 3-Sylow, il a 20 éléments d'ordre 3 : absurde. Donc $n_2 = 5$.

$-$*Étape 3 : conclusion.* Ainsi, $n_2 = 5$. Faisons agir transitivement G sur l'ensemble des 2-Sylow par conjugaison : $\rho : G \to \mathfrak{S}_5$. Cette action est non triviale et G est simple, donc ρ est fidèle. G est donc isomorphe à un sous-groupe d'indice $\dfrac{|\mathfrak{S}_5|}{|G|} = 2$. C'est donc $\mathfrak{A}_5$. $\square$

Remarque : $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$. En effet, soit H un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$. Alors H est distingué. Soit $\pi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n/H$ la projection canonique. L'application π est un morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{\pm 1\}$ donc $\pi = \varepsilon$ et $H = \operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Ker} \varepsilon = \mathfrak{A}_n$. En effet, π est déterminé par les images des transpositions (qui engendrent $\mathfrak{S}_n$). Or les transpositions sont toutes conjuguées. Comme π n'est pas trivial, π(transposition)$=-1$ donc $\pi = \varepsilon$.