Invariants de similitude

X. Gourdon, *Les maths en tête : Algèbre*, 2e édition, Ellipses. Théorème 1 page 290.

Recasage : 150, 151, 153, 154, 159.

Théorème 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe une unique famille $(P_1, \dots, P_r)$ de polynômes unitaires telle que $P_r | \dots | P_1$ et une famille de sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$ de E stables par u telles que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ et pour tout $1 \leq i \leq r$, u_{E_i} est cyclique de polynôme minimal P_i.

$\triangleright$ On admet le résultat suivant.

Lemme 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$, où $\pi_{u,x}$ est le générateur unitaire de l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}$.

Existence : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. Alors, le sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Vect}\{u^i(x),\, i \in \mathbb{N}\} = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x)),$$

où $d = \deg \pi_u$, est stable par u et u_F est cyclique de polynôme minimal π_u.

Montrons que F admet un sous-espace vectoriel stable. On procède par dualité en considérant $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(u^i(x)) = \delta_{i,d-1}$ et en posant

$$\Phi = \mathrm{Vect}\{{}^t u^i(\varphi),\, i \in \mathbb{N}\}.$$

Montrons que $G = \Phi^0 = \{y \in E,\, \forall \psi \in \Phi,\, \psi(y) = 0\}$ est un supplémentaire stable de F.

$\star$ G est stable par u car si $y \in G$, pour tout $\psi \in \Phi$,

$$\psi(u(y)) = \underbrace{{}^t u(\psi)}_{\in \Phi}\, y = 0$$

donc $u(y) \in G$.

$\star$ $F \cap G = \{0\}$ car si $y \in F \cap G$, on peut écrire $y = \alpha_0 x + \dots + \alpha_{d-1} u^{d-1}(x)$ de sorte que $0 = \varphi(y) = \alpha_{d-1}$ puis, $0 = {}^t u(\varphi) y = \alpha_{d-2} = 0$ et, par récurrence, $\alpha_i = 0$ pour tout $0 \leq i \leq d-1$.

$\star$ Il suffit donc de montrer que $\dim F + \dim G = n$. Comme $\dim G = \dim E - \dim \Phi$, il suffit de montrer que $\dim \Phi = \dim F$.

De l'égalité $F \cap G = \{0\}$, on déduit $\dim F + \dim G = \dim(F+G) \leq n$ d'où $\dim \Phi \geq \dim F$. De plus, si $i \in \mathbb{N}$, ${}^t u^i(\varphi) = \varphi(u^i)$, donc la famille $(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, {}^t u^{d-1}(\varphi))$ engendre Φ et $\dim \Phi \leq d = \dim F$ (par définition de $\pi_{u,x}$). Ainsi, $\dim \Phi = \dim F$.

On conclut par récurrence sur la dimension de E.

Unicité : Supposons par l'absurde que $Q_1, \dots, Q_s$ soit une autre famille de polynômes telle que $Q_s | \dots Q_1$ et telle qu'il existe $F_1, \dots, F_s$ des sous-espaces stables par u tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_s$ et u_{F_i} est cyclique de polynôme minimal Q_i. On a $P_1 = Q_1 = \pi_u$ donc on peut considérer $i = \min\{i \in \mathbb{N},\, P_i \neq Q_i\}$. On a

$$P_i(u)(E) = \bigoplus_{j=1}^{r} P_i(u)(E_j) = \bigoplus_{j<i} P_i(u)(E_j)$$

et

$$P_i(u)(E) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_i(u)(F_j).$$

Pour $j < i$, u_{E_j} et u_{F_j} sont cycliques de polynôme minimal $P_j = Q_j$ donc semblables à la matrice compagnon C_{P_j}. On en déduit que $\dim P_i(u)(E_j) = \dim P_i(u)(F_j)$. Alors, en comparant les dimensions dans les égalités précédentes, on obtient $\forall i \leq j \leq s$, $P_i(u)(F_j) = 0$. Ainsi, pour $j = i$, $Q_i | P_i$. Par symétrie, on en déduit que $P_i = Q_i$: absurde.

$\square$