Méthode de Newton

Cours d'analyse numérique de Benjamin Boutin (Université Rennes 1) pour le théorème 1.

I. Nourdin, *Agrégation de mathématiques, épreuve orale*, 2e édition, Dunod. Proposition 1.24.5 page 101 pour le théorème 2.

Recasage : 205, 208, 215, 218, 226, 233.

Théorème 1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $x^* \in \Omega$ tel que :

- $f(x^*) = 0$
- $df(x^*) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ *et on note $C > 0$ tel que* $\left\|\left| df(x^*)^{-1} \right\|\right| \leq C$
- $\exists R, L > 0, \forall x, y \in B(x^*, R)$, $\left\|\left| df(x) - df(y) \right\|\right| \leq L \left\| x - y \right\|$.

Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x^*, r) \subset \Omega$ et pour tout $x_0 \in B(x^*, r)$, la suite définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = x_k - [df(x_k)^{-1}] f(x_k)$$

est bien définie et converge vers x^* avec

$$\forall k \geq 0, \qquad \left\| x_{k+1} - x^* \right\| \leq CL \left\| x_k - x^* \right\|^2 .$$

$\triangleright$ On montre que la suite est bien définie. On aura alors montré au passage l'inégalité souhaitée.

– *Étape 1 : $\exists r > 0, \forall x \in B(x^*, r)$, $df(x) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.* Soit $x \in B(x^*, R)$. On a :

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}f(x^*) - (\mathrm{d}f(x^*) - \mathrm{d}f(x)) = \mathrm{d}f(x^*)(\mathrm{Id} - \underbrace{[\mathrm{d}f(x^*)^{-1}](\mathrm{d}f(x^*) - \mathrm{d}f(x))]}_{A(x)})$$

avec

$$\left\|\left| A(x) \right\|\right| \leq \left\|\left| \mathrm{d}f(x^*)^{-1} \right\|\right| \left\|\left| \mathrm{d}f(x^*) - \mathrm{d}f(x) \right\|\right| \leq CL \left\| x^* - x \right\| .$$

Alors, avec $r = \min\left(R, \dfrac{1}{2CL}\right)$, pour tout $x \in B(x^*, r)$, $\left\|\left| A(x) \right\|\right| \leq \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\mathrm{Id} + A(x) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. De plus,

$$\left\|\left| \mathrm{d}f(x)^{-1} \right\|\right| \leq \left\|\left| \mathrm{d}f(x^*)^{-1} \right\|\right| \left\|\left| (\mathrm{Id} - A(x))^{-1} \right\|\right| \leq \frac{\left\|\left| \mathrm{d}f(x^*)^{-1} \right\|\right|}{1 - \left\|\left| A(x) \right\|\right|} \leq 2C.$$

– *Étape 2 : on construit la suite (x_k) par récurrence.* Soit $x_0 \in B(x^*, r)$ et supposons $x_k \in B(x^*, r)$ défini pour $k \in \mathbb{N}$. Alors $\mathrm{d}f(x_k) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ donc on peut poser

$$x_{k+1} = x_k - [\mathrm{d}f(x_k)^{-1}] f(x_k).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left\| x_{k+1} - x^* \right\| &\leq \left\| x_k - x^* - [\mathrm{d}f(x_k)^{-1}](f(x_k) - f(x^*)) \right\| \\
&\leq \left\| [\mathrm{d}f(x_k)^{-1}](f(x_k) - f(x^*) - \mathrm{d}f(x_k)(x_k - x^*)) \right\| \\
&\leq \left\|\left| \mathrm{d}f(x_k)^{-1} \right\|\right| \left\| \int_0^1 \mathrm{d}f(x^* + t(x_k - x^*))(x_k - x^*)\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{d}f(x_k)(x_k - x^*)\mathrm{d}t \right\| \\
&\leq 2C \int_0^1 \left\|\left| \mathrm{d}f(x^* - t(x_k - x^*)) - \mathrm{d}f(x_k) \right\|\right| \left\| x_k - x^* \right\| \mathrm{d}t \\
&\leq 2CL \left\| x_k - x^* \right\|^2 \int_0^1 t\mathrm{d}t \\
&\leq CL \left\| x_k - x^* \right\|^2 \leq \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc montré que (x_k) est bien définie et prend ses valeurs dans $B(x^*, r)$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \left\| x_{k+1} - x^* \right\| \leq CL \left\| x_k - x^* \right\|^2 .$$

Posons $u_k = CL\|x_k - x^*\|$. Alors $0 \leq u_{k+1} \leq u_k^2$ et $u_0 = CL\|x_0 - x^*\| \leq CLr \leq \dfrac{1}{2}$ donc, par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_k \leq (u_0)^{2^k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

□

Remarque : Doit-on craindre les erreurs numériques inhérentes à l'utilisation d'un ordinateur ? En effet, partant de x_0, on voudrait définir u_1 par $u_1 = f(u_0$. Mais ce n'est pas possible et on obtient en fait une valeur approchée à ε près de u_1, notée v_1. On applique ensuite f à v_1 et non à u_1. Est-ce que ces erreurs s'accumulent ? Pour des méthodes de résolution basée sur le théorème de Picard, la réponse est non en vertu du théorème suivant.

Théorème 2

Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, $a \in E$, $r > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 \leq k < 1$. Soit $f : B(a,r) \to B(a,r)$ une application k-contractante et soient $(u_n), (v_n) \in B(a,r)^{\mathbb{N}}$ telles que

- $u_0 = v_0 \in B(a,r)$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(v_n)$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n - v_n\| \leq \varepsilon$.

Alors f admet un unique point fixe $x^* \in B(a,r)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|v_n - x^*\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\| + \frac{\varepsilon}{1-k}.$$

▷ f admet un unique point fixe d'après le théorème de Picard. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\|v_n - x^*\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\| + \varepsilon\sum_{i=0}^{n-1} k^i.$$

- $n = 1$: On a

$$\|u_1 - x^*\| = \|\phi(u_0) - \phi(x^*)\| \leq k\|u_0 - x^*\| \leq k\|u_0 - u_1\| + k\|u_1 - x^*\|$$

d'où $\|u_1 - x^*\| \leq \dfrac{k}{1-k}\|u_1 - u_0\|$ donc

$$\|v_1 - x^*\| \leq \|u_1 - x^*\| + \|u_1 - v_1\| \leq \frac{k}{1-k}\|u_1 - u_0\| + \varepsilon.$$

- Supposons le résultat pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \|v_{n+1} - x^*\| &\leq \|u_{n+1} - x^*\| + \|v_{n+1} - u_{n+1}\| \\ &\leq \|f(v_n) - f(x^*)\| + \varepsilon \leq k\|v_n - v^*\| + \varepsilon \\ &\leq \frac{k^{n+1}}{1-k}\|u_1 - u_0\| + \varepsilon\sum_{i=0}^{n} k^i. \end{aligned}$$

□