Un calcul lié à l'avance du périhélie de Mercure

F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, 4e édition, Cassini. Exercice 79 page 236.

Inutilisé

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(\varepsilon, x) = (x-a)(b-x) + \varepsilon x^3$$

où $a < b$ sont des réels fixés et $\varepsilon > 0$ un paramètre.

Pour $\varepsilon = 0$, l'équation $f(0, x)$ a pour solutions a et b sur $\mathbb{R}$. Qu'en est-il pour l'équation $f(\varepsilon, x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Montrons que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $f(\varepsilon, x) = 0$ a trois racines distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$. Démontrons alors le développement asymptotique

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f(\varepsilon, x)}} = \pi + \frac{3\pi}{4}(a+b)\varepsilon + \underset{\varepsilon\to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2).$$

Motivation : Cette intégrale apparaît en physique dans l'étude des planètes. Plus précisément, le terme d'ordre ε, qui provient d'une correction relativiste, a permis d'expliquer l'avance du périhélie de Mercure de 43 secondes d'arc par siècle.

Preuve. On sait que $f(0, a) = 0$ et $\partial_x f(0, a) = b - a > 0$ donc, comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert V_1 de 0, un voisinage ouvert W_1 de a et une fonction $x_1 \in \mathcal{C}^\infty(V_1, W_1)$ tels que

$$(\varepsilon, x) \in V_1 \times W_1 \text{ et } f(\varepsilon, x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon \in V_1 \text{ et } x = x_1(\varepsilon).$$

On sait que $x_1(0) = a$ et en dérivant la relation

$$\forall \varepsilon \in V_1, \qquad 0 = f(\varepsilon, x_1(\varepsilon))$$

il vient

$$(-2x_1(\varepsilon) + a + b + 3\varepsilon x_1(\varepsilon)^2)x_1'(\varepsilon) + x_1(\varepsilon)^3 = 0$$

d'où l'on déduit

$$x_1'(0) = \frac{-a^3}{b-a}.$$

Alors, d'après le théorème de Taylor-Young,

$$x_1(\varepsilon) = a - \frac{a^3}{b-a}\varepsilon + \underset{\varepsilon\to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2).$$

En permutant a et b, on obtient un voisinage ouvert V_2 de 0, un voisinage ouvert W_2 de b et une fonction $x_2 \in \mathcal{C}^\infty(V_2, W_2)$ tels que

$$(\varepsilon, x) \in V_2 \times W_2 \text{ et } f(\varepsilon, x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon \in V_2 \text{ et } x = x_2(\varepsilon)$$

et

$$x_2(\varepsilon) = b + \frac{b^3}{b-a}\varepsilon + \underset{\varepsilon\to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2).$$

De plus,

$$\forall(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(\varepsilon, x) = \varepsilon x^3 - x^2 + (a+b)x - ab$$

donc, d'après les relations coefficients-racines, la troisième racine $x_3(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ de f vérifie

$$x_1(\varepsilon) + x_2(\varepsilon) + x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$$

d'où

$$\mathbb{R} \ni x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - (a+b) - (a^2 + ab + b^2)\varepsilon + \underset{\varepsilon\to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2).$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a donc trois solutions distinctes.

En notant $x_i = x_i(\varepsilon)$ pour $i = 1, 2, 3$, on remarque que

$$\forall(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(\varepsilon, x) = (x - x_1)(x_2 - x)(1 - \varepsilon(x + x_1 + x_2))$$

de sorte que

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1 - \varepsilon(x + x_1 + x_2))^{-1/2}}{\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}} \mathrm{d}x.$$

En posant $u = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et $v = \dfrac{x_2 - x_1}{2}$ et en effectuant le changement de variables $x = u + v \sin t$, on obtient

$$I(\varepsilon) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \varepsilon(3u + v \sin t))^{-1/2} \,\mathrm{d}t.$$

Or, d'après les développements limités précédents,

$$3u + v \sin t = \frac{3}{2}(a + b) + \frac{b - a}{2} \sin t + r(\varepsilon, t)$$

avec $|r(\varepsilon, t)| \leq C\varepsilon$ uniformément en t car $|\sin t| \leq 1$. De plus, d'après le théorème de Taylor-Lagrange,

$$\forall |x| \leq \frac{1}{2}, \qquad (1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} z + \alpha \frac{z^2}{2}$$

avec $|\alpha| \leq 3\sqrt{2}$ (en majorant la dérivée seconde). Il en découle que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$(1 + \varepsilon(3u + v \sin t))^{-1/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}(3u + v \sin t) + s(\varepsilon, t)$$

avec $|s(\varepsilon, t)| \leq C\varepsilon^2$ uniformément en t car $|\sin t| \leq 1$.

Ainsi, grâce à l'uniformité en t des majorations de $r(\varepsilon, t)$ et $s(\varepsilon, t)$,

$$I(\varepsilon) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{3}{4}(a + b)\varepsilon + \frac{b - a}{4} \varepsilon \sin t\right) \mathrm{d}t + \underset{\varepsilon \to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2)$$

et finalement,

$$I(\varepsilon) = \pi + \frac{3\pi}{4}(a + b)\varepsilon + \underset{\varepsilon \to 0}{\mathcal{O}}(\varepsilon^2).$$