Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

P. Caldero, J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et géométries, Tome premier*, Calvage & Mounet. Proposition A.3 page 239.

Recasage : 108, 161, 183.

Proposition 1

Pour tout $n \geq 2$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs.

▷ – Définissons $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to {}^tMM$. φ est continue donc $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\}) \cap \det{}^{-1}(\{1\})$ est fermé. De plus, munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme associée au produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Pour tout $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on a $\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$. Ainsi, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est fermé borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact.

– Soit $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Il existe $r, s \in \mathbb{N}$, $\theta_1, \dots, \theta_s \in \mathbb{R}, P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$M = P \begin{pmatrix} I_r & & & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} {}^tP$$

(l'espace propre associé à -1 est de dimension paire car $\det = 1$). Posons

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & P \begin{pmatrix} I_r & & & \\ & R_{t\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{t\theta_s} \end{pmatrix} {}^tP. \end{array}$$

γ est un chemin continu tracé dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = M$. Ainsi, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. □

Théorème 2

$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

▷ Soit H un sous-groupe distingué non trivial de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

– *Étape 1 : Il suffit de montrer que H contient un retournement.* Supposons que $r_D \in H$ soit un retournement d'axe la droite D. Soit D' une autre droite de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe une rotation $s \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ telle que $s(D) = D'$. Considérons $r = sr_Ds^{-1}$. Cet endomorphisme a le spectre de r_D donc c'est un retournement, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est D', donc r est un retournement d'axe D'. De plus, comme H est distingué, $r \in H$. Ainsi, H contient tous les retournements. Comme $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements[1], $H = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

– *Étape 2 : Exhibons un retournement dans H.* Soit $h \in H\backslash\{I_3\}$. On considère l'application continue

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}([g,h]) \end{array}.$$

Comme la trace d'un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est de la forme $1 + 2\cos\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) \subset]-\infty, 3]$. De plus, comme $\mathrm{SO}(3)$ est connexe, compact et contient I_3, son image par φ est de la forme $[a, 3]$, $a \leq 3$.

Supposons par l'absurde que $a = 3$. Alors, $\forall g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $[g, h] = I_3$ donc $h \in Z(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = I_3$: absurde.

Donc $a < 3$ et on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < 1 + 2\cos\dfrac{\pi}{n} < 3$ car 3 est la limite de cette suite strictement croissante. Soit alors $g_n \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(g_n) = 1 + 2\cos\dfrac{\pi}{n}$. Alors $h_n = g_nhg_n^{-1}h^{-1} \in H$ (distingué) est une rotation d'angle $\pm\dfrac{\pi}{n}$. Alors, $h_n^n \in H$ est un retournement. □

1. $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions. Ces réflexions sont en nombre pair pour des raisons de déterminant. Si $u \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, on peut écrire $u = r_1 \circ \cdots \circ r_{2k}$ et donc $u = (-r_1) \circ \cdots \circ (-r_{2k})$ et $-r_i$ est un retournement (regarder le spectre).