Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie*, Dunod. Page 141.

Recasage : 101, 106, 150, 181, 203.

Lemme 1

Soient V un espace vectoriel de dimension finie, K un compact convexe non vide de V et G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$ tel que

$$\forall u \in G, \qquad u(K) \subset K.$$

Alors il existe $x \in K$ tel que $\forall u \in G$, $u(x) = x$.

$\triangleright$ – *Étape 1 : Construction d'une norme G-invariante.* Soit N une norme euclidienne sur V. On pose

$$\forall x \in V, \qquad N'(x) = \max_{u \in G} N(u(x)).$$

Pour chaque $x \in V$, $\mathrm{ev}_x : u \in \mathscr{L}(V) \mapsto u(x) \in V$ est (linéaire) continue donc, comme N est continue, l'image de G par $N \circ \mathrm{ev}_x$ est compacte, donc N' est bien définie. C'est une norme sur V car N en est une. De plus, pour $u_0 \in G$ et $x \in V$, $N'(u_0(x)) = N'(x)$ car la translation $u \mapsto u \circ u_0$ est une bijection de G (groupe), donc N' est G-invariante. Enfin, si x et y vérifient $N'(x+y) = N'(x) + N'(y)$, alors il existe $u \in G$ tel que

$$N'(x+y) = N(u(x)+u(y)) \leq N(u(x)) + N(u(y)) \leq N'(x) + N'(y)$$

donc $N(u(x)+u(y)) = N(u(x)) + N(u(y))$ et donc, comme N est euclidienne, $u(x)$ et $u(y)$ sont positivement liés, donc, comme u est inversible, x et y sont positivement liés.

– *Étape 2 : Construction d'un point fixe.* Pour $u \in G$ posons $F_u = \{x \in K,\, u(x) = x\}$ et montrons que

$$\bigcap_{u \in G} F_u \neq \emptyset.$$

Comme les F_u sont fermés dans le compact K, par la propriété de Borel-Lebesgue, il suffit de montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (u_1, \dots, u_p) \in G^p, \qquad \bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i} \neq \emptyset.$$

Avec ces notations, posons $u = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i$ et montrons que u admet un point fixe. Fixons $x_0 \in K$ et définissons :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad x_k = \frac{1}{k+1}\sum_{\ell=0}^{k} \underbrace{u^{\ell}(x_0)}_{\in K} \in K \text{ par convexité.}$$

Comme K est compact, il existe une extraction φ et $a \in K$ telle que $x_{\varphi(k)} \to a$. Or

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad u(x_k) = x_k + \frac{1}{k+1}\left(u^{k+1}(x_0) - x_0\right)$$

donc, comme $u(K) \subset K$ compact, le second membre tend vers 0 et donc $u(x_{\varphi(k)}) \to a$. Par continuité de u et unicité de la limite, on en déduit que $u(a) = a$. Alors,

$$N'(a) \underset{G\text{-invariance}}{=} \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} N'(u_i(a)) \geq N'(u(a)) \underset{G\text{-invariance}}{=} N'(a)$$

donc les $u_i(a)$ sont positivement liés. Comme ils sont de même normes $N'(a)$, ils sont égaux. Comme leur moyenne vaut a, on a $\forall i$, $u_i(a) = a$ *ie.* $a \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i}$. □

Théorème 2

Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset O(q)$.

$\triangleright$ – *Étape 1 : Représentation de G.* On définit une loi de groupe sur G par

$$\forall (A,B) \in G, \qquad A * B = BA.$$

Considérons l'application $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ définie par :

$$\forall A \in G, \forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \qquad \rho(A)(S) = {}^t\!ASA.$$

Comme $\rho(A * B) = \rho(A) \circ \rho(B)$ et $\rho(I_n) = \mathrm{Id}$, ρ est bien définie.

Comme ρ est continue et G est compact, l'image $\widetilde{G} = \rho(G)$ est compacte.

– *Étape 2 : Construction d'un compact convexe non vide $\widetilde{G}$-stable.* Comme G est compact, $\{{}^t\!MM,\, M \in G\}$ est un compact non vide inclus dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est convexe puisque

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \bigcap_{X \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\, {}^tXAX > 0\}}_{\text{convexe}}.$$

Alors, l'enveloppe convexe $K = \mathrm{Conv}(\{{}^t\!MM,\, M \in G\})$ est compacte et incluse dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus, elle est $\widetilde{G}$-stable. En effet, pour $A, M \in G$ on a

$$\rho(A)({}^t\!MM) = {}^t(MA)(MA) \in K$$

et on conclut par linéarité de $\rho(A)$ et la définition de K.

– *Étape 3 : Conclusion.* D'après le lemme, il existe $S \in K$ tel que $\forall u \in \widetilde{G}$, $u(S) = S$. Alors, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et, pour tout $A \in G$, ${}^t\!ASA = S$, *ie.* $G \subset O(q_S)$.

$\square$