Théorèmes d'Abel et taubérien faible

X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, 2e édition, Ellipses. Exercices 10 et 11 page 252.

Recasage : 207, 223, 224, 230, 235, 241, 243

Théorème 1 (*Abel*)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de converge ≥ 1 telle que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur $B(0,1)$. Pour $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in B(0,1),\ \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Alors, la limite suivante existe et

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

▷ Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{n=0}^{N} a_n$ et $R_N = S - S_N$.

Soient $z \in B(0,1)$ et $N \in \mathbb{N}$. Par une transformation d'Abel, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right) - S_N &= \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{N} a_n(z^n - 1) = \sum_{n=1}^{N} (R_n - R_{n-1})(z^n - 1)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=\cancel{1}\,0}^{N} R_n(z^n - 1)\\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - z^n) - R_N(z^N - 1)\\
&= (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1).
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(z)$, $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} S$, et $R_N(z^N - 1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, on en déduit que la série de terme général $(R_n z^n)$ converge et :

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $N \geq 0$ tel que $\forall n > N$, $|R_n| \leq \varepsilon$. Alors,

$$|f(z) - S| \leq |z-1|\sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon|z-1|\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \leq |z-1|\sum_{n=0}^{N}|R_n| + \varepsilon\frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

Supposons $z \in \Delta_{\theta_0}$ avec $z = 1 - \rho e^{i\theta}$, $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$. Alors, $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2$ et, si $\rho \leq \cos\theta_0$,

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) \leq \frac{2\rho}{2\rho\cos\theta - \rho^2} \leq \frac{2}{2\cos\theta - \rho} \leq \frac{2}{\cos\theta_0}.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha\sum_{n=0}^{N}|R_n| \leq \varepsilon$. Alors, tout pour $z \in \Delta_{\theta_0}$ tel que $|z-1| \leq \min(\alpha, \cos\theta_0)$, on a $|f(z) - S| \leq \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right)$. Ainsi, $\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = S$. □

Remarques : – On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4}$$

car la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par le critère des séries alternées.

– Si la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument, alors la série entière de terme général $(a_n z^n)$ converge normalement sur le disque fermé, donc est continue sur le disque fermé.

– L'existence de la limite n'implique pas la convergence au bord :

$$\lim_{x\to 1^-} (-1)^n x^n = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

mais la série de terme général $(-1)^n$ ne converge pas.

On a une réciproque partielle si $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Théorème 2 (*Taubérien faible*)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. Notons f sa somme sur $B(0,1)$. On suppose qu'il existe $S\in\mathbb{C}$ tel que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = S$. Si $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, alors la série de terme général (a_n) converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

▷ Pour $N\in\mathbb{N}$, notons $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$. Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,1[$,

$$S_N - f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,1[$, $(1-x^n) \leq (1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1}) \leq n(1-x)$ donc, en notant M un majorant de $(n|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ (bornée car convergente), on a :

$$\begin{aligned}\forall x\in]0,1[, \forall N>0, \qquad |S_N - f(x)| &\leq \sum_{n=1}^{N} n|a_n|(1-x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{N}|a_n|x^n \\ &\leq MN(1-x) + \frac{\sup_{n>N} n|a_n|}{N(1-x)}.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon\in]0,1[$. Comme $(n|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que $\sup_{n>N_0} n|a_n| \leq \varepsilon^2$. Alors, pour $N\geq N_0$,

$$\left|S_N - f\left(1-\frac{\varepsilon}{N}\right)\right| \leq (M+1)\varepsilon.$$

De plus, il existe $N_1\geq N_0$ tel que $\forall N\geq N_1$, $\left|f\left(1-\dfrac{\varepsilon}{N}\right) - S\right| \leq \varepsilon$. Donc, pour $N\geq N_1$,

$$|S_N - S| \leq \left|S_N - f\left(1-\frac{\varepsilon}{N}\right)\right| + \left|f\left(1-\frac{\varepsilon}{N}\right) - S\right| \leq (M+2)\varepsilon$$

donc $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} S$. □