Théorème de Burnside

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 2*, 2e édition, Cassini. Exercice 3.8 page 185.

Inutilisé.

Théorème 1

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que G est d'exposant fini : il existe $N \in \mathbb{N}$, $\forall A \in G$, $A^N = I_n$. Alors G est fini et $|G| \leq N^{n^3}$.

$\triangleright$ On va construire une injection f telle que $f(G)$ est finie.

– *Étape 1 : Construction d'une injection $f : G \to \mathbb{C}^m$.* Soit $(M_1, \ldots, M_m) \in G^m$ une base de $\mathrm{Vect}(G)$. On définit :

$$f : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C}^m \\ A & \mapsto & (\mathrm{Tr}(AM_i))_{1 \leq i \leq m} \end{array}$$

Supposons que $f(A) = f(B)$ pour $A, B \in G$. Alors, par linéarité de la trace,

$$\forall M \in \mathrm{Vect}(G), \qquad \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM).$$

En particulier, avec $D = AB^{-1}$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{Tr}(D^k) = \mathrm{Tr}(A \underbrace{B^{-1}D^{k-1}}_{\in G \subset \mathrm{Vect}(G)}) = \mathrm{Tr}(BB^{-1}D^{k-1}) = \mathrm{Tr}(D^{k-1})$$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(D^k) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$. Montrons que $D - I_n$ est nilpotente. Alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Tr}((D - I_n)^k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{Tr}(D^j)(-1)^{k-j} = n(1-1)^k = 0.$$

Il en découle que $D - I_n$ est nilpotente.

Or, $X^N - 1$ est scindé à racines simples et annule les matrices de G. On en déduit que les matrices de G sont diagonalisables. En particulier, D est diagonalisable et $D - I_n = 0$ *ie.* $A = B$.

– *Étape 2 : $f(G)$ est fini.* Par définition de f, on a $f(G) \subset T^m$ où

$$T = \{\mathrm{Tr}\, A,\ A \in G\} = \left\{ \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda,\ A \in G \right\}.$$

Or, pour tout $A \in G$, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ où

$$X^N - 1 = \prod_{i=1}^{N} (X - \lambda_i).$$

Donc $T \subset \{\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n},\ (i_1, \ldots, i_n) \in [\![1, N]\!]^n\}$. Comme, de plus, $m \leq n^2$, on en déduit que

$$|G| = |f(G)| \leq |T|^m \leq (N^n)^{n^2} = N^{n^3}.$$

□

On a utilisé le résultat suivant.

Lemme 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$, alors A est nilpotente.

$\triangleright$ Supposons par l'absurde que $A^n \neq 0$. Soit alors $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes non nulles de A. Notons $n_1, \dots, n_r$ les multiplicités respectives. Comme A est trigonalisable, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 = \mathrm{Tr}(A^k) = n_1 \lambda_1^k + \cdots + n_r \lambda_r^k.$$

En particulier,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\lambda_i \neq 0$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a $\det(M) \neq 0$ donc $n_1 = \cdots = n_r = 0$: absurde. $\square$