# Théorème central limite

H. Queffélec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, 4e édition, Dunod. Théorème II.22 page 540.

Recasage : 261, 262, 263.

**Théorème 1**

*Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées dans $L^2$ avec $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) > 0$. Alors*

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

▷ Quitte à considérer $\dfrac{X_i - m}{\sigma}$ on peut supposer $m = 0$ et $\sigma = 1$. Grâce au théorème de Paul Lévy, il suffit de montrer que, si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X(t).$$

Or

**Lemme 2**

*Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.*

▷ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{iXt}] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixt} \mathrm{d}x$ d'après le théorème de transfert. Or

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ixt} \in L^1(\mathbb{R})$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ixt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$
- $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $\left| e^{-\frac{x^2}{2}} ixe^{ixt} \right| = |x| e^{-\frac{x^2}{2}}$ intégrable et indépendant de $t$

donc d'après le théorème de dérivation, $\varphi_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_X'(t) = \frac{it}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ixt} \mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties, on a donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X'(t) = \frac{it}{\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ixt} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{(it)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ixt} \mathrm{d}x = -t^2 \varphi_X(t).$$

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_X(t) = \varphi_X(0) e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

□

Notons $\varphi = \varphi_{X_1}$. Comme $X_1 \in L^2$, le théorème de dérivation des intégrales à paramètres permet de monter que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$\varphi'(0) = \mathbb{E}[iX] = 0 \qquad \varphi''(0) = \mathbb{E}[-X^2] = -1.$$

De plus, comme les $X_i$ sont indépendantes,

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\left[ e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[ e^{\frac{itX_k}{\sqrt{n}}} \right] = \varphi\left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n.$$

Or $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ donc d'après la théorème de Taylor-Young,

$$\varphi\left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \varphi(0) + \frac{t}{\sqrt{n}} \varphi'(0) + \frac{t^2}{2n} \varphi''(0) + \frac{\varepsilon_n}{n} = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \right)^n.$$

Il suffit donc de montrer le lemme suivant :

**Lemme 3**

*Soit* $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *convergeant vers* $z \in \mathbb{C}$. *Alors*

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z.$$

▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$$

avec

$$a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\left(1 - \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right) & \text{si } k \leq n \\ \dfrac{1}{k!} & \text{si } k \geq n. \end{cases}$$

Comme $a_{n,k} \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left|e^{z_n} - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}|z_n|^k \\ &\leq e^{|z_n|} - \left(1 - \frac{|z_n|}{n}\right)^n \\ &\leq e^{|z_n|} - e^{n\ln\left(1-\frac{z_n}{n}\right)} \\ &\underset{\ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}}{\leq} e^{|z_n|} - e^{|z_n| - \frac{|z_n|^2}{2n}} \\ &\leq e^{|z_n|}\left(1 - e^{-\frac{|z_n|^2}{2n}}\right) \\ &\underset{e^x \geq x+1}{\leq} e^{|z_n|}\frac{|z_n|^2}{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left|e^z - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| \leq |e^z - e^{z_n}| + e^{|z_n|}\frac{|z_n|^2}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

□